Львівський національний університет імені Івана Франка

Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

Ярова Оксана Анатоліївна

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

Асимптотичний аналіз та перехідні явища в марковських випадкових еволюціях

01.01.05 – Теорія ймовірностей і математична статистика

Подається на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

О. А. Ярова

Науковий керівник

Єлейко Ярослав Іванович

доктор фізико-математичних наук, професор

Львів – 2019

АНОТАЦІЯ

Ярової О.А. Асимптотичний аналіз та перехідні явища в марковських випадкових еволюціях. Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 Теорія ймовірностей і математична статистика. Львівський національний університет імені Івана Франка. Львів, 2019.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей однорідних марковських процесів та випадкових еволюцій в масштабі часу $\frac{t}{g(\varepsilon)}$, де $g(\varepsilon)\to 0,$ при $\varepsilon\to 0.$ Першим об’єктом дослідження являються стрибкоподібні процеси з незалежними приростами в схемах двох нелінійних апроксимацій.

У дисертаційній роботі розглядаються генератори марковських процесів та марковські випадкові еволюції в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві з нелінійним нормуванням, досліджуються розв’язки проблеми великих відхилень в схемах нелінійних апроксимацій та визначається зв’язок між нелінійними функціями нормування.

Метою дисертаційної роботи є знаходження нелінійних нормуючих функцій для генераторів марковських процесів та марковських випадкових еволюцій. Визначаються умови нелінійної апроксимації Пуассона та Леві та досліджується асимптотичне зображення генераторів марковських процесів. В проблемі великих відхилень досліджуються дві нелінійні нормуючі функції, що нормують час та інтенсивність стрибків.

Перший розділ містить огляд літератури за темою дисертації. Наведено стислий опис праць, у яких досліджувались проблеми схожі з розглянутими у дисертаційній роботі. Схожі процеси досліджувались в статтях та монографіях В.С. Королюка, І.В. Самойленка, А.В. Свищука, А.Ф. Турбіна та інших. Проте, в даних працях, що описували процеси з незалежними

приростами та марковські випадкові еволюції в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві, процеси досліджувались у лінійному нормуванні. У випадку пуассонової апроксимації процеси досліджуються в масштабі часу $\frac{t}{\varepsilon}$, а в апроксимації Леві в масштабі часу $\frac{t}{\varepsilon^2}$. Дана робота присвячена дослідженню процесів в нелійному нормуванні.

В другому розділі розглядаються марковські процеси з незалежними приростами та їх генератори. Процеси нормуються нелінійними функціями. Генератори марковських процесів розглядаються в схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві.

В схемі пуассонової апроксимації процеси розглядаються в масштабі часу $\frac{t}{g_1(\varepsilon)}$, при цьому в таких процесах відсутня дифузійна складова. На досліджувані процеси накладаються чотири умови, які описують схему нелінійної апроксимації Пуассона. Зокрема, перша умова визначає перший та другий моменти, друга описує ядро інтенсивності, третя зумолює відсутність дифузійної складової, а четверта визначає рівномірну квадратичну інтегровність.

В схемі нелійної апроксимації Леві процеси розглядаються в масштабі часу $\frac{t}{g_2(\varepsilon)}$, при чому $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon))$. Варто зазначити, що $g_1(\varepsilon) \to 0$, $g_2(\varepsilon) \to 0$, якщо $\varepsilon \to 0$.

В даному розділі знайдено асимптотичне представлення генераторів в схемах обох нелінійних апроксимацій. Слід зазначити, що отримані результати узгоджуються з уже відомими результатами за умов лінійного нормування часу.

Окрім цього, марковські процеси досліджуються в просторі R^d. Генератори таких процесів також нормуються нелінійними функціями схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві.

Також, у цьому розділі показано існування граничного генератора марковського процесу з нелінійним нормуванням.

В третьому розділі розглядається проблема великих відхилень. Розв'язок знаходиться через нелінійний експоненційний генератор, який відповідає напівгрупі Нісіо.

Генератори марковських процесів в проблемі великих відхилень розглядаються в схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві. В схемі апроксимації Пуассона присутні три нормуючі функції. Одна з нелінійних функцій нормує час, друга – інтенсивність стрибків, а третя величину стрибків. Такі фунції визначають, як процес з незалежними приростами, так і експоненційний генератор в проблемі великих відхилень у випадку нелінійної апроксимації Пуассона. Між усіма нелінійними функціями визначено зв'язок. Для проблеми великих відхилень в схемі нелінійної апроксимації Пуассона доведено теорему, в якій визначено вигляд граничного експоненційного генератора за умов апроксимації Пуассона та граничної умови між нелінійними функціями нормування.

Також, проблема великих відхилень розглядається в схемі апроксимації Леві. В даному випадку також нормується час у процесі з незалежними приростами, величина стрибків та інтенсивність стрибків. Визначено інші нормуючі функції та знайдено зв'язок між ними. Для такого випадку визначено нелінійний експоненційний генератор за допомогою напівгрупи Нісіо та доведено теорему, яка визначає розв'язок проблеми великих відхилень в схемі нелінійної апроксимації Леві. Крім цього, визначено граничну умову в схемі даної апроксимації.

Знайдено умови в схемах даних апроксимацій при нормуванні нелінійними функціями. Також, знайдено граничні генератори, що визначають розв'язок проблеми великих відхилень.

В четвертому розділі розглядаються марковські випадкові еволюції. Генератори даних еволюцій нормуються нелінійними функціями. В схемі апроксимації Леві знайдено асимптотичне зображення генераторів марковських випадкових еволюцій.

Крім цього, марковські еволюції розглядаються в проблемі великих відхилень. Знайдено граничний генератор, що визначає розв'язок проблеми великих відхилень для генератора марковських еволюцій в схемі апроксимації Леві.

Для знаходження розв'язку знайдено нелінійну напівгрупу Нісіо та нелінійний експонеційний генератор. Також, доведено слабку збіжність випадкової еволюції до граничної еволюції даного процесу. Визначено умови апроксимації Пуассона та Леві для випадкових еволюцій при нормуванні нелінійними функціями.

Крім цього, розглядаються імпульсні рекурентні процеси в схемі нелінійної апроксимації Леві. Для таких процесів доведено теорему, в основі якої лежить семімартингальне представлення процесу.

У дисертаційній роботі отримано наступні нові наукові результати:

- отримано необхідні та достатні умови існування граничних генераторів в схемах нелінійних апроксимацій;
- знайдено нелінійні нормуючі функції в представленні генераторів марковських процесів в схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві;
- показано існування нелінійних нормуючих функцій;
- знайдено розв'язок проблеми великих відхилень в умовах нелінійних апроксимацій та показано зв'язок між нелінійними нормуючими функціями;
- знайдено нелінійні нормуючі функції для марковських випадкових еволюцій;
- досліджено імпульсні рекурентні процеси з нелінійним нормуванням в схемі апроксимації Леві.

Ключові слова: генератор марковського процесу, нелінійне нормування, апроксимація Пуассона, апроксимація Леві, проблема великих відхилень, випадкові еволюції.

ABSTRACT

Yarova O.A. Asymptotic analysis and transitional phenomena in Markov random evolutions. Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.05 Probability theory and mathematical statistics. Ivan Franko National University of Lviv, Ministry of Education and Science of Ukraine. Lviv, 2019.

The dissertation is devoted to the study of the properties of homogeneous Markov processes and random evolutions in a time scale $\frac{t}{g(\varepsilon)}$, where $g(\varepsilon) \to 0$, when $\varepsilon \to 0$. The first object of the study is the jump-like processes with independent increments in the schemes of two nonlinear approximations.

In the dissertation work generators of Markov processes and Markov random evolution in schemes of Poisson and Levy approximation with nonlinear normalization are considered, solutions of the problem of large deviations in schemes of nonlinear approximations are studied and the connection between nonlinear normalization functions is determined.

The purpose of the dissertation is to find nonlinear normalizing functions for generators of Markov processes and Markov random evolutions. The conditions of the nonlinear Poisson and Levy approximation are determined and the asymptotic image of generators of Markov processes is investigated. In the problem of large deviations, two nonlinear normalizing functions, which normalize the time and intensity of jumps, are investigated.

The first section contains a review of the literature on the topic of the dissertation. A brief description of the works is presented, in which problems similar to those considered in the dissertation paper were investigated. Similar processes were investigated in articles and monographs of VS. Korolyuka, IV Samoilenko, AV Svischuk, AF Turbine and others. However, in these papers

describing processes with independent increments and random Markov evolutions in the schemes of Poisson and Levy approximation, processes were investigated in linear normalization. In the case of Poisson approximation, processes are investigated on a time scale $\frac{t}{\varepsilon}$, but in the approximation of Levy in a time scale $\frac{t}{\varepsilon^2}$. This work is devoted to the study of processes in nonlinear valuation.

The second section deals with Markov processes with independent increments and their generators. Processes are normalized by nonlinear functions. Generators of Markov processes are considered in the scheme of Poisson and Levy approximation.

In the scheme of the Poisson approximation processes are considered on a time scale $\frac{t}{g_1(\varepsilon)}$, while in such processes there is no diffusion component. On the processes under study, there are four conditions that describe the scheme of nonlinear approximation of Poisson. In particular, the first condition determines the first and second moments, the second describes the nucleus of intensity, the third makes the absence of the diffusion component convincing, and the fourth determines uniform quadratic integrability.

In the scheme of nonlinear approximation Levy processes are considered in time scale $\frac{t}{g_2(\varepsilon)}$, moreover $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon))$. It is worth noting that $g_1(\varepsilon) \to 0$, $g_2(\varepsilon) \to 0$, when $\varepsilon \to 0$.

In this section we find the asymptotic representation of generators in the schemes of both nonlinear approximations. It should be noted that the results obtained are consistent with the already known results under the conditions of linear rationing of time.

In addition, Markov processes are investigated in space. Generators of such processes are also normalized by nonlinear functions of the Poisson approximation scheme and Levy approximation.

Also, in this section we show the existence of a boundary generator of the Markov process with nonlinear normalization.

The third section deals with the problem of large deviations. The solution is through a nonlinear exponential generator, which corresponds to the Nisio semigroup.

Generators of Markov processes in the problem of large deviations are considered in the scheme of Poisson approximation and approximation of Levi. In the Poisson approximation scheme, there are three normalizing functions. One of the nonlinear functions normalizes time, the second - the intensity of jumps, and the third value of jumps. Such functions determine both the process with independent increments and the exponential generator in the problem of large deviations in the case of Poisson's nonlinear approximation. Between all nonlinear functions a connection is defined. For the problem of large deviations in the Poisson nonlinear approximation scheme we have proved a theorem in which the form of the boundary exponential generator is determined in the conditions of Poisson approximation and the boundary condition between non-linear functions of normalization.

Also, the problem of large deviations is considered in the scheme of approximation Levy. In this case, time is also normalized in the process with independent increments, the magnitude of jumps and the intensity of jumps. Other normative functions are defined and the connection between them is found. For this case, a nonlinear exponential generator with Nisio's half-tube is determined and a theorem is defined that determines the solution of the problem of large deviations in the non-linear approximation scheme of Levy. In addition, the boundary condition in the scheme of this approximation is determined.

Conditions are found in the schemes of approximation data in the normalization by nonlinear functions. Also found limiting generators that determine the solution of the problem of large deviations.

In the fourth section we consider Markov random evolution. Generators of evolution data are normalized by nonlinear functions. In the approximation scheme of Levy, we find an asymptotic representation of generators of Markov random evolutions.

In addition, Markov evolutions are considered in the problem of large deviations. A boundary generator is found which determines the solution of the problem of large deviations for the Markov evolution generator in the Levy approximation scheme.

A nonlinear semi-group Nisio and a nonlinear exponential generator are found to find the solution. Also, the weak convergence of random evolution to the boundary evolution of this process is proved. The conditions for the approximation of Poisson and Levy for the random evolution in the normalization by nonlinear functions are determined.

In addition, impulse recurrence processes in the non-linear approximation scheme of Levy are considered. A theorem has been proved for such processes, which is based on the semimartingal representation of the process.

In the dissertation work the following new scientific results were obtained:

- nonlinear normalizing functions were found in the representation of generators of Markov processes in the scheme of Poisson and Levy approximation;
- the existence of nonlinear normalizing functions is shown;
- the solution of the problem of large deviations in the conditions of nonlinear approximations is found; and the connection between nonlinear normalizing functions is shown;
- nonlinear normalizing functions for Markov random evolutions are found;
- Investigated pulsed recurrent processes with nonlinear normalization in the Levy approximation scheme.

Keywords: generator of the Markov process, nonlinear normalization, Poisson approximation, approximation of Levy, the problem of large deviations, random evolution.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях

1. Ярова О.А. Про поведінку нормуючого множника генератора в апроксимації випадкових процесів / Ярова О.А, Єлейко Я.І. // Кибернетика и системный анализ. – 2016. – Том 52, №2. – С. 147-153.
2. Yarova O. About selection a small normalization parameter for generator of random process / Yarova O. // Вісник ЛНУ. Серія мех.-мат. – 2016. - №81. – С. 159-162
3. Yarova O.A. The Problem of Large Deviations for Markov Evolutions in the Scheme of Poisson and Levi Approximation / Yarova O.A., Yeleyko Ya.I. // Columbia International Publishing. Contemporary Mathematics and Statistics. – 2017. - Vol. 4, No 1. P. 28-40
4. Ярова О.А. Нелінійне нормування генераторів марковських процесів у просторі R^d / Ярова О.А. // Вісник ЛНУ. Серія мех.-мат. – 2018. - №83. – С. 202-207
5. Ярова О.А. Нелінійне нормування випадкової еволюції в схемі апроксимації Леві / Ярова О.А. // Кібернетика та системний аналіз. 2018. Том 54, №3. С. 160-165.
6. Yarova O.A. Nonlinear Approximation in the Large Deviations Principle / Yarova O.A., Yeleyko Ya.I. // Statistics, Opt. Inform. Comput. – Vol. 6, December 2018, pp. 600-608.

Тези наукових доповідей

1. Yarova O. Behaviour of generator normalization factor in approximation of random processes / Yarova O., Yeleyko Ya. // International Conference “Probability, Reliability and Stochastic Optimization”, Kyiv, Ukraine, April 7-10, 2015, Taras Shevchenko National University of Kyiv.
2. Yarova O. Nonlinear normalization of generator of Markov processes / Yarova O. // XXVIII International Conference “Problems of decision and making under uncertainties” (PDMU-2016), August 25-30, 2016,

Brno, Czech Republic.

3. Ярова О.А. Нелінійна апроксимація в проблемі великих відхилень / О.А. Ярова, Я.І. Єлейко // XXIX International Conference “Problems of decision and making under uncertainties” (PDMU-2017), May 10-13, 2017, Mukachevo, Ukraine
4. Yarova O. Nonlinear approximation for Markov Evolutions / Yarova O., Yeleyko Ya. // XXX International Conference “Problems of decision and making under uncertainties” (PDMU-2017), August 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania.
5. Yarova O. The problem of large deviations for Markov evolutions in the scheme of nonlinear approximation / Yarova O. // International Conference Modern Stochastics: Theory and applications. IV, Kyiv, Ukraine, May 24-26, 2018, Taras Shevchenko National University of Kyiv.
6. Yarova O. Nonlinear normalization for impulse recurrent process in the scheme of Levi approximation / Yarova O. // XXXI International Conference “Problems of decision and making under uncertainties” (PDMU-2018), July 3-8, 2018, Lankaran-Baku, Republic of Azerbaijan.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Випадкові еволюції почали розвиватися в кінці 60-х років XX століття. Термін випадкової еволюції вперше було введено в статті Р. Грієго та Р. Херша. Згодом, у 60-70-х роках прикладні задачі з використанням випадкових еволюцій досліджуються американськими математиками Р. Хершем, М. Пінським, Г. Папаніколау, Т. Куртцем, Р. Грієго, Л. Горостізею. Слід виділити здобутки Г. Папаніколау, який запропонував мартингальний підхід для доведення граничних теорем. У своїй праці Г. Папаніколау використовував методи, схожі до методів розв’язання проблеми сингулярного збурення.

Важливим кроком у розвитку випадкових еволюцій були роботи В.С. Королюка та А.Ф. Турбіна. У цих працях для доведення граничних теорем було розроблено теорію фазового укрупнення. Після цього А.Ф. Турбін та О.С. Хохель довели граничні теореми про регулярні наближення до розв’язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь для різних стохастичних моделей та динамічних систем з коефіцієнтами, які залежать від марковських процесів.

Задачі пов’язані з стохастичними апроксимаціями випадкових еволюцій досліджувались у працях Я.М. Чабанюка. Окрім цього, В.С. Королюк та А.В. Свищук розвинули теорію напівмарковських випадкових еволюцій, в основі якої була теорія мартингалів.

У дисертації розглядаються генератори марковських процесів та марковські випадкові еволюції в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві з нелінійним нормуванням, досліджуються розв’язки проблеми великих відхилень в схемах нелінійних апроксимацій та визначається зв’язок між нелінійними функціями нормування.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка в рамках науково-дослідної теми МС-160Пк

«Стохастичні моделі банкрутства фінансових установ. Методи моделювання та управління фінансовими потоками» (№0113U003063).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є знаходження нелінійних нормуючих функцій для генераторів марковських процесів та марковських випадкових еволюцій. Визначаються умови нелінійної апроксимації Пуассона та Леві та досліджується асимптотичне зображення генераторів марковських процесів. В проблемі великих відхилень досліджуються дві нелінійні нормуючі функції, що нормують час та інтенсивність стрибків.

Об'єктом дослідження є марковські процеси та марковські випадкові еволюції.

Предметом дослідження є аналіз марковських процесів та марковських випадкових еволюцій в умовах нелінійного нормування в схемах апроксимацій Пуассона та Леві.

Методи дослідження. Теорія випадкових процесів. Проблема великих відхилень. Проблема сингулярного збурення операторів. Теорія нелінійних напівгруп та операторів. Мартингальна характеризація та теорія семі мартингалів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, отримані в дисертації, є новими. Основні з них наступні:

- знайдено нелінійні нормуючі функції в представленні генераторів марковських процесів в схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві;
- показано існування нелінійних нормуючих функцій;
- знайдено розв'язок проблеми великих відхилень в умовах нелінійних апроксимацій та показано зв'язок між нелінійними нормуючими функціями;
- знайдено нелінійні нормуючі функції для марковських випадкових еволюцій;

- досліджено імпульсні рекурентні процеси з нелінійним нормуванням в схемі апроксимації Леві.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані в дисертаційній роботі результати мають теоретичне значення для вивчення теорії випадкових процесів. Проте, дані результати можуть бути використані у застосуваннях до теорії масового обслуговування, теорії надійності, фінансової математики та природничих наук.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. За результатами дисертації опубліковано шість наукових праць. Постановка задачі належить доктору фізико-математичних наук, професору Єлейку Я. І.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались та обговорювались на наукових конференціях та наукових семінарах, а саме:

- Теоретичні та прикладні аспекти аналізу фінансових систем: XIV Міжнародна науково-практична конференції аспірантів та студентів (Львів, 2014);
- International Conference “Probability, Reliability and Stochastic Optimization” (Kyiv, 2015);
- Scientific Seminar in Europa – Universitat Viadrina Frankfurt Oder (Germany, 2016);
- Scientific Seminar in Technische Universitat Dresden (Germany, 2016);
- XXIX International Conference “Problems of decision and making under uncertainties” (Mukachevo, 2017);
- Засідання наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка (Львів, 2018);
- Засідання наукового семінару кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного

факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, 2018);

- International Conference Modern Stochastics: Theory and applications. IV (Kyiv, 2018);
- Засідання наукового семінару кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Київського політехнічного інституту імені Ігоря Сікорського (Київ, 2018).

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 12 наукових праць. З них

- 6 статей, серед яких [27], [28], [29], [56], у наукових фахових виданнях України, з них дві статті [27], [29] надруковані у журналі, англомовна версія якого включена до наукометричної бази Scopus, [59] у журналі, що входить до наукометричної бази Scopus, 1 стаття в електронному журналі [62];
- 6 тез доповідей на наукових конференціях [26], [57], [58], [60], [61], [63].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 63 найменування та додатку. Повний обсяг роботи 123 сторінки, в тому числі 107 сторінок основного тексту.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, встановлено мету, об’єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, особистий внесок здобувача та короткий зміст роботи.

Перший розділ містить огляд літератури за темою дисертації. Наведено стислий опис праць, у яких досліджувались проблеми схожі з розглянутими у дисертаційній роботі.

У **другому розділі** досліджуються генератори марковських процесів з нелінійним нормуванням в схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві.

У пунктах 2.1-2.7 **другого розділу** наведені основні означення, твердження та теореми.

У підрозділі 2.8 **другого розділу** розглядається сім'я процесів з незалежними приростами $\eta_1^\varepsilon(\cdot)$ і траєкторіями в області визначення $D_R[0;\infty)$, які нормуються нелінійною функцією $g_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$

$$\eta_1^\varepsilon(t) = \eta(\frac{t}{g_1(\varepsilon)}),\ \ t \ge 0,$$

де $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами, що визначається генератором

$$\Gamma_1^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon(dv).$$

В схемі пуассонової апроксимації виконуються наступні умови:

(P1) Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = \int_R v \Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)(b + \Theta_b^\varepsilon)$$

та

$$c_\varepsilon = \int_R v^2 \Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)(c + \Theta_c^\varepsilon),$$

де

$$|b| < \infty,\ \ 0 < c < \infty,\ \ \left|\Theta_b^\varepsilon\right| \to 0,\ \ \left|\Theta_c^\varepsilon\right| \to 0,\ \ g_1(\varepsilon) \to 0, \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

(P2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^\varepsilon = \int_R q(v) \Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)(\Gamma_q + \Theta_g^\varepsilon),$$

де Γ_q визначається наступним співвідношенням

$$\Gamma_q = \int_R q(v) \Gamma^0(dv),$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R),$ таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

(P3) В граничному генераторі виконується наступна умова

$$\int_R v^2 \Gamma^0(dv) > 0.$$

(P4) Має місце співвідношення

$$\lim_{c \to \infty} \int_{|v|>c} v^2 \Gamma^0(dv) = 0.$$

Твердження 0.1. Генератор процесу з незалежними приростами

$$\Gamma_1^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv)$$

в схемі апроксимації Пуассона має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_1^{\varepsilon}\varphi(u) = b\varphi'(u) + \int_R [\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)]\Gamma^{0}(dv) + \Theta^{\varepsilon}\varphi,$$

$\left|\Theta^{\varepsilon}\right| \to 0,\ \ g_1(\varepsilon)\to 0,$ при $\varepsilon \to 0.$

У підрозділі 2.9 **другого розділу** розглядається сім’я процесів з незалежними приростами $\eta_2^{\varepsilon}(t)$, що нормується нелінійною функцією $g_2(\varepsilon),$ де $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon))$

$$\eta_2^{\varepsilon}(t) = \eta(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}),\ \ t \ge 0,$$

де $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами, що визначається генератором

$$\Gamma_2^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv),$$

де $g_2(\varepsilon)\to 0$ при $g_1(\varepsilon)\to 0$,

$$\Gamma^{\varepsilon}(\{0\}) = 0.$$

Нехай виконуються умови апроксимації Леві:

(L1) Апроксимація середніх

$$b_{\varepsilon} = \int_R v\Gamma^{\varepsilon}(dv) = b_1 g_1(\varepsilon) + g_2(\varepsilon)(b + \Theta_b^{\varepsilon})$$

та

$$c_{\varepsilon} = \int_R v^2\Gamma^{\varepsilon}(dv) = g_2(\varepsilon)(c + \Theta_c^{\varepsilon}),$$

де

$$|\,b\,| < \infty,\ \ 0 < c < \infty,\ \left|\Theta_b^{\varepsilon}\right| \to 0,\ \ \left|\Theta_c^{\varepsilon}\right| \to 0.$$

(L2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^{\varepsilon} = \int_R q(v)\Gamma^{\varepsilon}(dv) = g_2(\varepsilon)(\Gamma_q + \Theta_g^{\varepsilon}),$$

де Γ_q визначається наступним співвідношенням

$$\Gamma_q = \int_R q(v)\Gamma^{0}(dv),$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R)$, таких, що $\frac{q(v)}{v^2} \to 0$, коли $v \to 0.$

(L3) Має місце співвідношення

$$\lim_{c \to \infty} \int_{|v|>c} v^2 \Gamma^0(dv) = 0.$$

Твердження 0.2. Генератор процесу з незалежними приростами

$$\Gamma_2^\varepsilon \varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon(dv)$$

в схемі апроксимації Леві має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_2^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} b_1 \varphi`(u) + (b - b_0)\varphi`(u) + \frac{c - c_0}{2} \varphi``(u) +$$

$$+ \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi`(u)] \Gamma^0(dv) + \Theta^\varepsilon \varphi,$$

де

$$b_0 = \int_R v \Gamma^0(dv), \;\; c_0 = \int_R v^2 \Gamma^0(dv), \;\; \left|\Theta^\varepsilon \varphi\right| \to 0, \; g_2(\varepsilon) \to 0, \;\; g_1(\varepsilon) \to 0, \;\; \varepsilon \to 0.$$

У підрозділах 2.10 та 2.11 **другого розділу** розглядається сім'я процесів з незалежними приростами в просторі R^d в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві. За результатами цих підрозділів, отримано наступні твердження.

Твердження 0.3. Генератор процесу з незалежними приростами

$$\Gamma_3^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon(dv)$$

в схемі апроксимації Пуассона має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_3^\varepsilon \varphi(u) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} + \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - \sum_{k=1}^d v_k \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k}] \Gamma^0(dv) + \Theta^\varepsilon \varphi,$$

$\left|\Theta^\varepsilon\right| \to 0, \;\; g_1(\varepsilon) \to 0,$ при $\varepsilon \to 0.$

Твердження 0.4. Генератор процесу з незалежними приростами

$$\Gamma_4^\varepsilon \varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon(dv)$$

в схемі апроксимації Леві має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_4^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \sum_{k=1}^d b_k^1 \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^d (b_k - b_k^0) \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^d (c_k - c_k^0) \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial u_k \partial u_r} +$$

$$+\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}]\Gamma^0(dv)+\Theta^\varepsilon\varphi,$$

де

$$b_0=\int_{R^d}v\Gamma^0(dv),\ c_0=\int_{R^d}vv^T\Gamma^0(dv),\ \left|\Theta^\varepsilon\varphi\right|\to 0,\ g_2(\varepsilon)\to 0,\ \ g_1(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

У підрозділі 2.12 **другого розділу** показано існування граничного генератора в схемі пуассонової апроксимації.

У підрозділах 3.1-3.4 **третього розділу** розглядається проблема великих відхилень, її мартингальна характеризація та напівгрупа Нісіо.

Постановка задачі: розглянемо послідовність випадкових величин $\{X_n\}$ в метричному просторі *E*. Тоді $\{X_n\}$ задовільняє принцип великих відхилень, якщо існує неперервна знизу функція $I:E\to[0,\infty)$ така, що для кожної відкритої множини *A*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P\{X_n\in A\}\geq-\inf_{x\in A}I(x),$$

а для кожної замкненої множини *B*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P\{X_n\in B\}\leq-\inf_{x\in B}I(x).$$

Функціонал *I* називають функціоналом дії.

Розв'язок проблеми великих відхилень знаходиться через нелінійний експоненційний генератор напівгрупи

$$H_t^\varepsilon\varphi(u)=\varepsilon\ln Ee^{\frac{\varphi(x^\varepsilon(t))}{\varepsilon}}.$$

У підрозділі 3.5 **третього розділу** знайдено розв'язок проблеми великих відхилень в умовах пуассонової апроксимації.

Розглядається сім'я процесів з незалежними приростами $\eta_1^\varepsilon(\cdot)$ і траєкторіями в області визначення $D_R[0;\infty)$:

$$\eta_5^\varepsilon(t)=g_1(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right),\ t\geq 0.$$

В даному нормуванні $g_1(\varepsilon),g_2(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Дані процеси визначаються за допомогою генератора

$$\Gamma_5^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Розглянемо проблему великих відхилень в схемі апроксимації Пуассона, що задовольняє наступні умови:

(P1) Апроксимація середніх

$$b_{\varepsilon} = \int_R v\Gamma^{\varepsilon}(dv) = f_1(\varepsilon)(b + \Theta_b^{\varepsilon})$$

та

$$c_{\varepsilon} = \int_R v^2\Gamma^{\varepsilon}(dv) = f_1(\varepsilon)(c + \Theta_c^{\varepsilon})$$

де

$$|b| < \infty,\ 0 < c < \infty,\ \left|\Theta_b^{\varepsilon}\right| \to 0,\ \left|\Theta_c^{\varepsilon}\right| \to 0,\ f_1(\varepsilon) \to 0, \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

(P2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^{\varepsilon} = \int_R q(v)\Gamma^{\varepsilon}(dv) = f_1(\varepsilon)(\Gamma_q + \Theta_g^{\varepsilon}),$$

де Γ_q визначається наступним співвідношенням

$$\Gamma_q = \int_R q(v)\Gamma^0(dv)$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R),$ таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

(P3) В граничному генераторі виконується наступна умова

$$\int_R v^2\Gamma^0(dv) > 0.$$

(P4) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma^0(dv) = 0.$$

(P5) Експоненційна обмеженість

$$\int_R e^{p|v|}\Gamma_q(dv) < \infty.$$

Розв’язок проблеми великих відхилень в схемі апроксимації Пуассона визначається нелінійним експоненційним генератором

$$\mathrm{H}_{\Gamma}^{\varepsilon}\varphi(u) = e^{-\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}} g_1(\varepsilon)\Gamma^{\varepsilon} e^{\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}}.$$

Теорема 0.1. Розв'язок проблеми великих відхилень для процесу

$$\eta_5^\varepsilon(t) = g_1(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right),$$

$$\Gamma_5^\varepsilon\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv)$$

визначається граничним генератором H_Γ

$$\mathrm{H}_\Gamma\varphi(u) = b\varphi'(u) + \int_R (e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u))\Gamma^0(dv)$$

тоді і тільки тоді, якщо виконується умова

$$(g_2(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon) f_1(\varepsilon) \to 1, \varepsilon \to 0.$$

У підрозділі 3.6 **третього розділу** знайдено розв'язок проблеми великих відхилень в умовах апроксимації Леві.

Розглядається сім'я процесів з незалежними приростами $\eta_1^\varepsilon(\cdot)$ і траєкторіями в області визначення $D_R[0;\infty)$:

$$\eta_6^\varepsilon(t) = g_1(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{g_3(\varepsilon)}\right),\ \ t \ge 0.$$

В даному нормуванні $g_1(\varepsilon), g_3(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0.$

Дані процеси визначаються за допомогою генератора

$$\Gamma_6^\varepsilon\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv).$$

В схемі апроксимації Леві виконуються наступні умови

(L1) Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = \int_R v\Gamma^\varepsilon(dv) = f_1(\varepsilon)b_1 + f_2(\varepsilon)(b + \Theta_b^\varepsilon)$$

та

$$c_\varepsilon = \int_R v^2\Gamma^\varepsilon(dv) = f_2(\varepsilon)(c + \Theta_c^\varepsilon),$$

де

$$b < \infty,\ \ c < \infty,\ \ \left|\Theta_b^\varepsilon\right| \to 0,\ \ \left|\Theta_c^\varepsilon\right| \to 0,\ \ f_1(\varepsilon), f_2(\varepsilon) \to 0, \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

В даному нормуванні $f_2(\varepsilon) = o(f_1(\varepsilon)).$

(L2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^{\varepsilon} = \int_R q(v)\Gamma^{\varepsilon}(dv) = f_2(\varepsilon)(\Gamma_q + \Theta_g^{\varepsilon}),$$

де Γ_q визначається наступним співвідношенням

$$\Gamma_q = \int_R q(v)\Gamma^0(dv),$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R),$ таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

(L3) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma^0(dv) = 0.$$

(L4) Експоненційна обмеженість

$$\int_R e^{p|v|}\Gamma_q(dv) < \infty.$$

Теорема 0.2. Розв’язок проблеми великих відхилень для процесу

$$\eta_6^{\varepsilon}(t) = g_1(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{g_3(\varepsilon)}\right),$$

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv)$$

визначається граничним генератором H_{Γ}

$$\mathrm{H}_{\Gamma}\varphi(u) = (b - b_0)\varphi'(u) + \frac{1}{2}(c - c_0)(\varphi'(u))^2 + \int_R (e^{v\varphi'(u)} - 1)\Gamma^0(dv)$$

тоді і тільки тоді, якщо винокується умова

$$(g_3(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon) f_2(\varepsilon) \to 1, \varepsilon \to 0.$$

У підрозділі 4.1 **четвертого розділу** розглядається проблема великих відхилень для марковських еволюцій в схемі пуассонової апроксимації.

Розглянемо випадкову еволюцію

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x(s)).$$

Далі, розглянемо сімейство нормованих марковських процесів з незалежними приростами $\eta^{\varepsilon}(t;x)$ та марковську випадкову еволюцію $\xi_{\varepsilon}^{\delta}$. В схемі Пуассонової апроксимації є дві нормуючі функції: функція $g_1(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0,$

нормує час та величину стрибків, а функція $f_1(\varepsilon), \varepsilon \to 0,$ нормує інтенсивність стрибків.

$$\xi^{\varepsilon}(t) = \xi^{\varepsilon}(0) + \int_0^t \eta^{\varepsilon}\left(ds; x\left(\frac{s}{(g_1(\varepsilon))^2}\right)\right), t \ge 0,$$

$$\eta^{\varepsilon}(t) = g_1(\varepsilon)\eta^{f(\varepsilon)}\left(\frac{t}{(g_1(\varepsilon))^2}\right), t \ge 0.$$

Дані процеси визначаються генератором

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv; x), x \in E,$$

де $\varphi(u)$- двічі диференційована функція в R, що прямує до 0 на нескінченності та з sup-нормою, $\varphi(u) \in C_0^2(R).$

Ядро інтенсивності належить до класу $C^3(R).$ Дане ядро задовольняє умову

$$\Gamma^{\varepsilon}(0) = 0.$$

Нормуюча функція $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon)),\ g_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0.$

В даному нормуванні $(g_1(\varepsilon))^{-1} \cdot f_1(\varepsilon) \to 1,$ при $g_1(\varepsilon) \to 0,\ f_1(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to 0.$

Розглянемо проблему великих відхилень в схемі пуассонової апроксимації з наступними умовами

(P1) Апроксимація середніх

$$b_{\varepsilon}(x) = \int_R v\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv; x) = f_1(\varepsilon)(b(x) + \Theta_b^{\varepsilon}(x))$$

та

$$c_{\varepsilon}(x) = \int_R v^2\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv; x) = f_1(\varepsilon)(c(x) + \Theta_c^{\varepsilon}(x)),$$

де

$$\sup_{x \in E} | b(x) | \le b < \infty, \sup_{x \in E} | c(x) | \le c < \infty,$$

$$\left|\Theta_b^{\varepsilon}(x)\right| \to 0,\ \ \left|\Theta_c^{\varepsilon}(x)\right| \to 0,\ \ \ f_1(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

(P2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^{f(\varepsilon)}(x) = \int_R q(v)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv; x) = f_1(\varepsilon)(\Gamma_q(x) + \Theta_q^{\varepsilon}(x))$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R),$ таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

Ядро $\Gamma_q^{f(\varepsilon)}(x)$ є обмеженим

$$|\Gamma_q(x)| \le \Gamma_q, \Gamma_q = \text{constant}.$$

Ядро $\Gamma_q(x)$ визначається таким співвідношенням

$$\Gamma_q(x) = \int_R q(v)\Gamma^0(dv; x).$$

(P3) В граничному генераторі виконується наступна умова

$$\int_R v^2\Gamma^0(dv; x) > 0.$$

(P4) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{x\in E} \int_{|v|>c} v^2\Gamma^0(dv; x) = 0,$$

що визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

(P5) Експоненційна обмеженість

$$\int_R e^{p|v|}\Gamma_q(dv; x) < \infty.$$

Теорема 0.3. Нехай виконуються умови **P1-P5** та при $\varepsilon \to 0$

$$(g_1(\varepsilon))^{-1} \cdot f_1(\varepsilon) \to 1.$$

Тоді має місце слабка збіжність

$$\xi^\varepsilon(t) \Rightarrow \xi(t)$$

Процес $\xi^\varepsilon(t)$ визначається генератором

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = (g_2(\varepsilon))^{-1} Q\varphi(\cdot, x) + \Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u, \cdot),$$

де

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv; x), x \in E,$$

Граничний процес $\xi(t)$ визначається експоненційним генератором

$$\mathrm{H}^0\varphi(u) = \hat{b}\varphi'(u) + \int_R [e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)]\widehat{\Gamma}^0(dv)$$

$$\hat{b} = \Pi b(x) = \int_E \pi(dx) b(x), \ \widehat{\Gamma}^0(v) = \Pi\Gamma^0(v; x) = \int_E \pi(dx)\Gamma^0(v; x).$$

У підрозділі 4.2 **четвертого розділу** розглядається інше нормування для випадкових марковських еволюцій в проблемі великих відхилень

$$\xi^{\varepsilon}(t)=\xi^{\varepsilon}(0)+\int_0^t \eta^{\varepsilon}\left(ds; x\left(\frac{s}{(g_1(\varepsilon))^3}\right)\right), t\ge 0,$$

$$\eta^{\varepsilon}=g_1(\varepsilon)\eta^{f(\varepsilon)}\left(\frac{t}{(g_1(\varepsilon))^3}\right), t\ge 0.$$

Дані процеси визначаються генератором

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u)=(g_3(\varepsilon))^{-1}\int_R[\varphi(u+g_1(\varepsilon)v)-\varphi(u)]\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x), x\in E,$$

де $\varphi(u)$- двічі диференційована функція в R, що прямує до 0 на нескінченності та з sup-нормою, $\varphi(u)\in C_0^2(R)$.

Ядро інтенсивності належить до класу $C^3(R)$. Дане ядро задовольняє умову

$$\Gamma^{\varepsilon}(0)=0.$$

Нормуюча функція $g_2(\varepsilon)=o(g_1(\varepsilon)),\ g_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

В даному нормуванні $(g_2(\varepsilon))^{-1}\cdot f_2(\varepsilon)\to 1$, при $g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon)\to 0,\ f_1(\varepsilon), f_2(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0.$

Розглянемо умови апроксимації Леві в проблемі великих відхилень

(L1) Апроксимація середніх

$$b_{\varepsilon}(x)=\int_R v\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x)= f_1(\varepsilon)b_1(x)+ f_2(\varepsilon)(b(x)+\Theta_b^{\varepsilon}(x))$$

та

$$c_{\varepsilon}(x)=\int_R v^2\Gamma^{\varepsilon}(dv;x)= f_2(\varepsilon)(c(x)+\Theta_c^{\varepsilon}(x)),$$

де

$$\sup_{x\in E}|b(x)|\le b<\infty,\ \sup_{x\in E}|c(x)|\le c<\infty,$$

$$\left|\Theta_b^{\varepsilon}(x)\right|\to 0,\quad \left|\Theta_c^{\varepsilon}(x)\right|\to 0,\quad f_1(\varepsilon)\to 0, \varepsilon\to 0.$$

(L2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^{f(\varepsilon)}(x)=\int_R q(v)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x)= f_1(\varepsilon)(\Gamma_q(x)+\Theta_q^{\delta}(x))$$

для всіх обмежених $q\in C^3(R)$, таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2}\to 0$, коли $v\to 0$.

Ядро $\Gamma_q^{f(\varepsilon)}(x)$ є обмеженим

$$|\Gamma_q(x)| \le \Gamma_q, \Gamma_q = \text{constant}.$$

Ядро $\Gamma_q(x)$ визначається таким співвідношенням

$$\Gamma_q(x) = \int_R q(v)\Gamma^0(dv;x).$$

Ядро $\Gamma^0(dv;x)$ належить класу $C^3(R)$.

(L3) Умова балансу

$$\int_E \pi(dx)b_1(x) = 0.$$

(L4) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{x\in E}\int_{|v|>c} v^2\Gamma^0(dv;x) = 0, \quad c\to\infty,$$

що визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

(L5) Експоненційна обмеженість

$$\int_R e^{p|v|}\Gamma_q(dv;x) < \infty.$$

Теорема 0.4. Нехай виконуються умови **L1-L5**, тоді має місце слабка збіжність

$$\xi^\varepsilon(t) \Rightarrow \xi(t) \text{ при } \varepsilon\to 0, \delta\to 0.$$

Процес $\xi^\varepsilon(t)$ визначається генератором

$$L^\varepsilon\varphi(u,x) = (g_3(\varepsilon))^{-1}Q\varphi(\cdot,x) + \Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u,\cdot),$$

де

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1}\int_R[\varphi(u+g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x), x\in E,$$

граничний процес визначається експоненційним генератором

$$\mathrm{H}^0\varphi(u) = (\hat{b} - b_0)\varphi'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(\varphi'(u))^2 + \int_R[e^{v\varphi'(u)} - 1]\widehat{\Gamma}^0(dv)$$

$$\hat{b} = \Pi b(x) = \int_E \pi(dx)b(x), \quad b_0 = \Pi b_0(x) = \int_E \pi(dx)b_0(x),$$

$$b_0(x) = \int_R v\Gamma^0(dv;x), \quad \sigma^2 = (\hat{c} - c_0) + 2\Pi b_1(x)R_0 b_1(x)\Pi,$$

$$\hat{c} = \Pi c(x) = \int_E \pi(dx)c(x), \quad c_0 = \Pi c_0(x) = \int_E \pi(dx)c_0(x),$$

$$c_0(x) = \int_R v^2 \Gamma^0(dv;x), \quad \hat{\Gamma}^0(v) = \Pi\Gamma^0(v;x) = \int_E \pi(dx)\Gamma^0(v;x).$$

У підрозділі 4.3 **четвертого розділу** описуються випадкові еволюції.

Випадкова еволюція з локально незалежними приростами визначається співвідношенням

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x(s)), \; t \geq 0,$$

де $\eta(t;x)$- неперервний справа марковський процес є процесом з локально незалежними приростами та визначається генератором

$$\Gamma(x)\varphi(u) = b(u;x)\varphi'(u) + \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\Gamma(u,dv;x).$$

У підрозділі 4.4 **четвертого розділу** розглядається випадкова еволюція в схемі апроксимації Леві із нормуючим множником $g_2(\varepsilon)$

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi_0^\varepsilon + \int_0^t \eta_\varepsilon(ds; x(\frac{s}{g_2(\varepsilon)})),$$

де $x(t), t \geq 0$є рівномірно ергодичним марковським процесом зі стаціонарним розподілом $\pi(A)$, $g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0,$ яка задовільняє наступні умови:

EL1. Апроксимація середніх:

$$b_\varepsilon(u;x) = \int_R v\Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = g_1(\varepsilon)b_1(u;x) + g_2(\varepsilon)(b(u;x) + \theta_b^\varepsilon(u;x)),$$

та

$$c_\varepsilon(u;x) = \int_R vv^* \Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = g_2(\varepsilon)(c(u;x) + \theta_c^\varepsilon(u;x)),$$

де v^* - транспонований вектор до вектора v, $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon)),$ $g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$

Знехтувальні доданки $\theta_b^\varepsilon(u;x), \theta_c^\varepsilon(u;x)$ задовільняють умову

$$\sup_{x\in E} \left|\theta^\varepsilon(u;x)\right| \to 0, \; g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

EL2. Ядро інтенсивностей має вигляд

$$\Gamma_q^\varepsilon(u;x) = \int_R q(v)\Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = g_2(\varepsilon)(\Gamma_q(u;x) + \theta_q^\varepsilon(u;x)),$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R),$ таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

Ядро $\Gamma_q(u;x)$ обмежене для всіх $q \in C_3(R),$ так що, $|\ \Gamma_q(u;x)\ | \le \Gamma_q = const$.

Ядро $\Gamma_q(u;x)$ визначається співвідношенням

$$\Gamma_q(u;x) = \int_R q(v)\Gamma(u,dv;x).$$

EL3. Умова балансу:

$$\int_E \pi(dx) b_1(u;x) = 0.$$

EL4. Умови на початкові значення:

$$\sup_{\varepsilon>0} E\left|\xi_0^\varepsilon\right| \le C < \infty,$$

$$\left|\xi_0^\varepsilon\right| \to \xi_0,\ \ g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

EL5. Рівномірна квадратична інтегровність:

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{x\in E} \int_{v>c} vv^* \Gamma(u,dv;x) = 0.$$

EL6. Умова зростання:

Існує додатна константа L, така що

$$|b(u;x)| \le L(1+|u|),\ \ |c(u;x)| \le L(1+|u|^2)$$

для всіх дійснозначних невід’ємних функцій $f(v),\ v \in R,$ таких що,

$$\int_{R\setminus\{0\}} (1+f(v))|v|^2 dv < \infty$$

$$|\Lambda(u,v,x)| \le Lf(v)(1+|u|),$$

де $\Lambda(u,v,x)$ - похідна Радона-Нікодима ядра $\Gamma(u.,B;x)$ по відношенню до міри Лебега dv в R, тобто

$$\Gamma(u,dv;x) = \Lambda(u,v;x)dv.$$

EL7. $\sup\limits_{x\in E} \int\limits_0^\infty e^{ht} F_x(dt) \le H < +\infty,\ \ h > 0.$

EL8. Для довільного $r > 0$ існує константа $l_r,$ така що,

$$\left|\hat b(u) - \hat b(u')\right| + \left|\sigma^2(u) - \sigma^2(u')\right| + \left|\hat\Gamma(u,v) - \hat\Gamma(u',v)\right| \le l_r |u-u'|,$$

якщо $|u| \le R,\ \ v \le R.$

Теорема 0.5. За умов **EL1-EL7** має місце слабка збіжність

$$\xi^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \xi^{0}(t), \; g_2(\varepsilon) \to 0, \; \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\xi^0(t)$ за умови **EL8** визначається генератором

$$\hat{\Gamma}\varphi(u) = \hat{b}(u)\varphi'(u) + \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\hat{\Gamma}(u,dv),$$

$$\text{де } \hat{b}(u) = \int_E \pi(dx) b(u;x), \; \Gamma(u) = \int_E \pi(dx)\Gamma(u,dv;x).$$

У підрозділах 4.5, 4.6 **четвертого розділу** розглядається імпульсний рекурентний процес в умовах апроксимації Леві з нелінійним нормуванням

$$\tilde{\xi}^{\varepsilon}(t) = \tilde{\xi}_0^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{\nu\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)} \alpha_k^{\varepsilon}(x_{k-1}^{\varepsilon}), \; t \ge 0,$$

де $x^{\varepsilon}(t) = x\left(\dfrac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)$ - перемикаючий марковський процес, якому відповідає вкладений марковський процес відновлення $(x_k^{\varepsilon}, \tau_k^{\varepsilon}), \; k \ge 0,$ та рахуючий процес стрибків $\nu^{\varepsilon}(t) = \nu\left(\dfrac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)$.

Таким чином τ_k^{ε} - моменти стрибків даного процесу, а

$$x_k^{\varepsilon} = x^{\varepsilon}(\tau_k^{\varepsilon})$$

$$\nu^{\varepsilon}(t) = \max\{k \ge 0 : \tau_k^{\varepsilon} \le t\}.$$

Розглянемо умови апроксимації Леві

L1. Апроксимація середніх:

$$b_{\varepsilon}(u;x) = \int_{R^d} v\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x) = g_1(\varepsilon) b_1(u;x) + g_2(\varepsilon)(b(u;x) + \theta_b^{\varepsilon}(u;x)),$$

та

$$c_{\varepsilon}(u;x) = \int_{R^d} vv^* \Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x) = g_2(\varepsilon)(c(u;x) + \theta_c^{\varepsilon}(u;x)),$$

де v^* - транспонований вектор до вектора v, $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon))$, $g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$

Знехтувальні доданки $\theta_b^{\varepsilon}(u;x), \theta_c^{\varepsilon}(u;x)$ задовільняють умову

$$\sup_{\substack{x\in E\\ u\in R}}\left|\theta^{\varepsilon}(u;x)\right|\to 0,\ g_2(\varepsilon)\to 0,\varepsilon\to 0.$$

L2. Ядро інтенсивностей має вигляд

$$\Gamma_q^{\varepsilon}(u;x)=\int_{R^d}q(v)\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x)=g_2(\varepsilon)(\Gamma_q(u;x)+\theta_q^{\varepsilon}(u;x))$$

для всіх обмежених $q\in C^3(R),$ таких, що $\frac{q(v)}{v^2}\to 0,$ коли $v\to 0.$

Ядро $\Gamma_q(u;x)$ обмежене для всіх $q\in C_3(R),\, u\in R, x\in E$ так що,

$$\mid \Gamma_q(u;x) \mid \le K<\infty .$$

Ядро $\Gamma_q(u;x)$ визначається співвідношенням

$$\Gamma_q(u;x)=\int_{R^d}q(v)\Gamma(u,dv;x).$$

L3. Умова балансу:

$$\int_E \rho(dx)b_1(u;x)=0,$$

де $\rho(dx)$ задовольняє умову ергодичності зі стаціонарним розподілом $\pi(A), A\in E$

$$\pi(dx)q(x)=q\rho(dx), q=1/m, m=\int_E\rho(dx)m(x),\rho(B)=\int_E\rho(dx)P(x,B),\rho(E)=1.$$

L4. Умови на початкові значення:

$$\sup_{\varepsilon>0}E\left|\xi_0^{\varepsilon}\right|\le C<\infty$$

$$\left|\xi_0^{\varepsilon}\right|\to\xi_0,\ \ g_2(\varepsilon)\to 0,\varepsilon\to 0.$$

L5. Рівномірна квадратична інтегровність:

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{x\in E}\int_{v>c}vv^*\Gamma(u,dv;x)=0.$$

L6. Умова зростання:

Існує додатня константа L, така що

$$\left|b(u;x)\right|\le L(1+\left|u\right|),\ \ \left|c(u;x)\right|\le L(1+\left|u\right|^2)$$

Тоді для всіх дійснозначних невід’ємних функцій $f(v),\ v\in R,$ таких що,

$$\int_{R^d\setminus\{0\}}(1+f(v))\left|v\right|^2dv<\infty$$

$$\left|\Lambda(u,v,x)\right|\le Lf(v)(1+\left|u\right|),$$

де $\Lambda(u,v,x)$ - похідна Радона-Нікодима ядра $\Gamma(u.,B;x)$ по відношенню до міри Лебега *dv* в *R*, тобто

$$\Gamma(u,dv;x)=\Lambda(u,v;x)dv.$$

L7. Для довільного $r>0$ існує константа l_r, така що,

$$\left|\hat{b}(u)-\hat{b}(u')\right|+\left|\sigma^2(u)-\sigma^2(u')\right|+\left|\hat{\Gamma}(u,v)-\hat{\Gamma}(u',v)\right|\le l_r|u-u'|,$$

якщо $|u|\le r,\ |v|\le r.$

Теорема 0.6. За умов **L1-L6** має місце слабка збіжність

$$\tilde{\xi}^{\varepsilon}(t)\Rightarrow\tilde{\xi}^{0}(t),\ g_2(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

Граничний процес $\tilde{\xi}^{0}(t)$ є процесом Леві і за умови **L7** визначається генератором

$$\hat{L}\varphi(u)=(\hat{b}(u)-\hat{b}_0(u)+\hat{b}_1(u))\varphi'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2(u)\varphi''(u)+\lambda(u)\int_R(\varphi(u+v)-\varphi(u))\Gamma^0(u,dv),$$

де $\hat{b}_1(u,x)=q(x)\int_E P(x,dy)b_1(u;y),\ \Gamma(u,dv)=q\int_E \rho(dx)\Gamma(u,x;dv),$

$$\sigma^2(u)=2q\int_E\rho(dx)(\hat{b}_1(u;x)R_0\hat{b}_1^*(u;x)+\frac{1}{2}(c(u;x)-c_0(u;x))),\ \sigma^2(u)>0,$$

$$\lambda(u)=q\Gamma(u,R),\ \Gamma^0(u;dv)=\frac{\Gamma(u;dv)}{\Gamma(u;R)}.$$

Автор дисертаційної роботи висловлює щиру подяку науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Ярославу Івановичу Єлейку, за постановку задачі, увагу, підтримку та допомогу в роботі.

РОЗДІЛ І

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Випадкові еволюції почали розвиватися в кінці 60-х років XX століття. Термін випадкової еволюції вперше було введено в статті Р. Грієго та Р. Херша [32].

Дослідженням випадкових еволюцій також присвячені роботи Р.З. Хасьмінського [19,20]. У його працях показано, що розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(x,t,w,\varepsilon),$$

при умові

$$x(0) = x_0,$$

та при $\varepsilon \to 0$ на відрізку часу $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ може бути рівномірно наближений розв'язком задачі

$$\frac{dx}{dt} = \overline{F}(x), \quad x(0) = x_0, \quad \overline{F}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |\int_0^T EF(x,t,w,0)dt|.$$

Згодом, у 60-70-х роках прикладні задачі з використанням випадкових еволюцій досліджуються американськими математиками Р. Хершем, М. Пінським, Г. Папаніколау, Т. Куртцем, Р. Грієго, Л. Горостізею [30,31,33-35,46,48-51]. Слід виділити здобутки Г. Папаніколау [47], який запропонував мартингальний підхід для доведення граничних теорем. У своїй праці Г. Папаніколау використовував методи, схожі до методів розв'язання проблеми сингулярного збурення.

Важливим кроком у розвитку випадкових еволюцій були роботи В.С. Королюка та А.Ф. Турбіна [8,9]. У цих працях для доведення граничних теорем було розроблено теорію фазового укрупнення. Після цього А.Ф. Турбін та О.С. Хохель довели граничні теореми про регулярні наближення до розв'язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь для різних стохастичних моделей та динамічних систем з коефіцієнтами, які залежать від марковських процесів [17,18].

Задачі пов'язані з стохастичними апроксимаціями випадкових еволюцій досліджувались у працях Я.М. Чабанюка [21-25]. Окрім цього, В.С. Королюк та А.В. Свищук розвинули теорію напівмарковських випадкових еволюцій, в основі якої була теорія мартингалів [10,12,13].

Процеси з незалежними приростами та імпульсні процеси в схемах апроксимації Пуассона та Леві розглядаються у монографії В.С. Королюка та Н. Лімніоса [41]. Також у даній праці розглядаються процеси з локально незалежними приростами в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві.

У даній монографії доводиться слабка збіжність випадкових процесів. Доведення проводиться в два етапи. Спершу необхідно довести компактність дограничного процесу, яка гарантує наявність підпослідовності, що збігається. А на другому етапі потрібно довести єдиність отриманої границі. В даному випадку граничний перехід можна розглядати як на напівгрупах, так і на генераторах. У випадку генераторів потрібно представити процес, як єдиний розв'язок мартингальної задачі, що визначається за допомогою граничного генератора.

Розглядаються марковські процеси $(\xi^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t))$, де $\xi^\varepsilon(t)$- випадкова еволюція у просторі Евкліда, а $x^\varepsilon(t)$ - перемикаючий процес.

Запишемо мартингальну задачу для дограничного процесу

$$\mu^\varepsilon(t) = \varphi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t)) - \int_0^t L^\varepsilon \varphi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s), x^\varepsilon(s))ds$$

та для граничного процесу при $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$

$$\mu^0(t) = \varphi(\xi^0(t)) - \int_0^t L^0 \varphi(\xi^0(s))ds.$$

Згідно з теоремою 3.2 монографії [41]

$$\mu_t^{\varepsilon_n} \Rightarrow \mu_t.$$

Таким чином, довівши, що граничним мартингалом є $\mu^0(t)$ врахувавши єдність розв'язку мартингальної задачі можна стверджувати, що має місце слабка збіжність відповідних процесів.

У дисертації розглядаються генератори марковських процесів в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві з нелінійним нормуванням. В працях В.С. Королюка, Н. Лімніоса та І.В. Самойленка розглядаються процеси із лінійним нормуючим множником $\varepsilon \to 0.$

Апроксимація Пуассона - це деяка схема, подібна до схеми усереднення чи дифузійної апроксимації, яка дозволяє вивчати граничну поведінку випадкових процесів на зростаючих інтервалах часу.

Основна ідея пуассонової апроксимації [41, Глава 7] полягає у тому, що малим параметром серії нормуються інтенсивності стрибків. Таким чином, стрибки розділяють на два типи: малі стрибки, що нормуються ймовірностями близькими до одиниці, та великі стрибки, що відбуваються із ймовірінстю, що прямує до нуля при $\varepsilon \to 0.$

Розглянемо сім'ю марковських процесів з незалежними приростами $\eta_1^\varepsilon(\cdot)$ і траєкторіями в області визначення $D_R[0;\infty)$

$$\eta_1^\varepsilon(t) = \eta(\frac{t}{\varepsilon}),\ \ t \ge 0,$$

де $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами, що визначається генератором

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = \varepsilon^{-1} \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon(dv).$$

Функція $\varphi(u)$ двічі диференційована в R^d, дорівнює 0 в нескінченості, з sup-нормою $\|\varphi\| = \sup|\varphi(u)|,\ u \in R^d$. Ядро інтенсивності $\Gamma^\varepsilon(dv)$ належить класу $C_0^3(R)$ та задовільняє умову

$$\Gamma^\varepsilon(\{0\}) = 0.$$

Нехай виконуються умови апроксимації Пуассона

(P1) Апрокимація середніх

$$b_\varepsilon = \int_R v \Gamma^\varepsilon(dv) = \varepsilon(b + \Theta_b^\varepsilon)$$

та

$$c_\varepsilon = \int_R v^2 \Gamma^\varepsilon(dv) = \varepsilon(c + \Theta_c^\varepsilon)$$

де

$b < \infty,\ \ c < \infty,\ \ \left|\Theta_b^\varepsilon\right| \to 0,\ \ \left|\Theta_c^\varepsilon\right| \to 0,\ \ \varepsilon \to 0.$

(Р2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^\varepsilon = \int_R q(v)\Gamma^\varepsilon(dv) = \varepsilon(\Gamma_q + \Theta_g^\varepsilon),$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R),$ таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

Ядро $\Gamma^0(dv)$ задано на класі функцій, що визначають міру $C^3(R)$ таким співвідношення

$$\Gamma_q = \int_R q(v)\Gamma^0(dv).$$

(Р3) В граничному генераторі виконується наступна умова

$$\int_R v^2 \Gamma^0(dv) > 0.$$

(Р4) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2 \Gamma^0(dv) = 0,$$

що визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

Перейдемо до зображення генератора в схемі апроксимації Леві.

Розглянемо сім'ю марковських процесів з незалежними приростами

$$\eta_2^\varepsilon(t) = \eta\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right),\ \ t \ge 0,$$

де $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами, що визначається генератором

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = (\varepsilon^2)^{-1} \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv),$$

де $\varepsilon^2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0.$

Функція $\varphi(u)$ двічі диференційована в R^d, дорівнює 0 в нескінченості, з sup-нормою $\|\varphi\| = \sup|\varphi(u)|,\ u \in R^d$. Ядро інтенсивності $\Gamma^{\varepsilon}(dv)$ належить класу $C_0^3(R)$ та задовільняє умову

$$\Gamma^{\varepsilon}(\{0\}) = 0.$$

Нехай виконуються умови апроксимації Леві:

(L1) Апроксимація середніх

$$b_{\varepsilon} = \int_R v\Gamma^{\varepsilon}(dv) = b_1\varepsilon + \varepsilon^2(b + \Theta_b^{\varepsilon})$$

та

$$c_{\varepsilon} = \int_R v^2\Gamma^{\varepsilon}(dv) = \varepsilon^2(c + \Theta_c^{\varepsilon})$$

де

$$b < \infty,\ \ c < \infty,\ \ \left|\Theta_b^{\varepsilon}\right| \to 0,\ \ \left|\Theta_c^{\varepsilon}\right| \to 0.$$

(L2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^{\varepsilon} = \int_R q(v)\Gamma^{\varepsilon}(dv) = \varepsilon^2(\Gamma_q + \Theta_g^{\varepsilon})$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R)$, таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

Ядро $\Gamma^0(dv)$ задано на класі функцій, що визначають міру $C^3(R)$ таким співвідношення

$$\Gamma_q = \int_R q(v)\Gamma^0(dv).$$

(L3) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma^0(dv) = 0,$$

що визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

Нормування інтенсивності стрибків в схемах обох апроксимацій не є вичерпним, оскільки малий параметр є лінійною функцією. У другому розділі дисертації такі генератори розглядатимуться із нелінійним нормуванням.

Перейдемо до іншої частини дисертації, у якій розглядається проблема великих відхилень у схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві.

Проблема великих відхилень виникла як метод розв'язання статистичних задач, пов'язаних з оцінкою ймовірностей рідкісних подій.

Постановка задачі: розглянемо послідовність випадкових величин $\{X_n\}$ в метричному просторі *E*. Тоді, згідно з працею С. Варадана послідовність $\{X_n\}$ задовільняє принцип великих відхилень, якщо існує неперервна знизу функція $I: E \to [0,\infty)$ така, що для кожної відкритої множини *A*

$$\lim_{n\to\infty}\inf \frac{1}{n}\ln P\{X_n \in A\} \ge -\inf_{x\in A} I(x),$$

а для кожної замкненої множини *B*

$$\lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}\ln P\{X_n \in B\} \le -\inf_{x\in B} I(x).$$

Функціонал *I* називають функціоналом дії.

Для розв'язання таких задач використовується нерівність Чебишева для отримання оцінок рідкісних подій та обчислення функціоналу дії. Для того, щоб визначити функціонал дії, використовується перетворення Лежандра. Даний підхід знаходження функціоналу дії для марковських процесів представлено у працях М.Й. Фрейдліна та О.Д. Вентцеля [1-4, 55], М. Донскера та С. Варадана.

Ще один метод розв'зування таких задач пов'язаний з проблемою керування. Такий метод предсталено у праці В. Флемінга та П. Суганідіса. Розглянемо цей метод.

Варіаційна задача полягає у знаходженні функції $x(t)$, яка мінімізує функціонал

$$\int_t^{t_1} L(s, x(s), x'(s))ds + \psi(x(t_1)),$$

де L - поточна функція вартості, а ψ - гранична функція вартості.

Узагальненням цієї проблеми є задача керування, а саме проблема обчислення функції $u(s)$, яка мінімізує функціонал

$$J(t,x;u)=\int_t^{t_1} L(s,x(s),u(s))ds+\psi(x(t_1)),$$

де $u(s)$ - обмежена, вимірна за Лебегом функція керування, така, що рівняння

$$\frac{d}{ds}x(s)=A(s,x(s),u(s)),\ \ t\le s\le t_1,$$

за умови

$$x(t)=x$$

має єдиний розв'язок.

Множина усіх функцій $u(s)$ позначається $U(t,x)$.

Введемо функціонал значення

$$V(t,x)=\inf_{u(\cdot)\in U(t,x)} J(t,x,u).$$

Функціонал $V(t,x)$ є розв'язком нелінійного рівняння, яке називають рівнянням динамічного програмування

$$\frac{\partial}{\partial t}V(t,x)+\inf_{u\in U}\left\{L(t,x,u)+A(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)\right\}=0.$$

Подамо дане рівняння у вигляді рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана

$$-\frac{\partial}{\partial t}V(t,x)+H(t,x,D_xV(t,x))=0,$$

з крайовою умовою

$$V(t_1,x)=\psi(x),$$

де

$$H(t,x,p)=\sup_{u\in U}\{-pA(t,x,u)-L(t,x,u)\}.$$

За умови опуклості функцій H, L, запишемо зворотнє перетворення Лежандра

$$L(t,x,u)=\sup_{p\in R^d}\{-pA(t,x,u)-L(t,x,p)\}.$$

В результаті, отримуємо функцію $L(t,x,u)$, за допомогою якої знаходиться розв'язок рівняння у вигляді функціоналу значення.

Функцію значення можна розглядати, як напівгрупу Нісіо, що відповідає нелінійному оператору H.

Розглянемо ймовірнісну задачу керування, тобто лінійний оператор A^u з керуванням *u*, що описує марковський процес $x(t)$

$$dx(t)=\alpha(x(t),u(t))dw(t)+\gamma(x(t),u(t))dt$$

і має наступний вигляд

$$A^u\varphi(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}{}^2(x,u)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\varphi(x)+\sum_i\gamma_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x).$$

Введемо нелінійний оператор

$$H\varphi(x)=\sup_{u\in U}(A^u\varphi(x)+L(x,u)).$$

Такому оператору відповідає нелінійна напівгрупа Нісіо [44,45]

$$H_t\varphi(x)=\sup_{u\in U}E_x\left\{\int_0^t L(x(s),u(s))ds+\varphi(x(t))\right\}.$$

В даному представленні

$$A_t\varphi(x)=E_x\varphi(x(t))$$

є напівгрупою лінійного оператора без керування

$$A\varphi(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}{}^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\varphi(x)+\sum_i\gamma_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x).$$

Такий оператор відповідає процесу

$$dx(t)=\alpha(x(t))dw(t)+\gamma(x(t))dt.$$

Розглянемо формулу Брика.

Твердження 1.1. Нехай марковський процес $x^\varepsilon(t),\ t\geq 0$ при $\varepsilon\to 0$ є експоненційно компактним в області визначення $D_E[0;\infty)$ та існує границя

$$\Lambda(\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln E[e^{\frac{\varphi(x^\varepsilon(t))}{\varepsilon}}]$$

для всіх $\varphi\in C(E)$.

Тоді $x^\varepsilon(t)$ задовольняє принцип великих відхилень з функціоналом дії

$$I(x)=\sup_{\varphi\in C(E)}\{\varphi(x)-\Lambda(\varphi)\}.$$

Отже, замість збіжності напівгруп можна розглядати збіжність відповідних нелінійних генераторів та використовувати варіаційну формулу, яка пов'язує генератор *H* та функцію вартості *L*.

РОЗДІЛ II
НЕЛІНІЙНЕ НОРМУВАННЯ ГЕНЕРАТОРІВ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

В даному розділі розглядаються марковські процеси та їх генератори. Процеси нормуються нелінійними функціями. Генератори марковських процесів розглядаються в схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві. В схемі пуассонової апроксимації відсутня дифузійна складова.

Окрім цього, марковські процеси досліджуються в просторі R^d. Генератори таких процесів також нормуються нелінійними функціями схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві.

Також, у цьому розділі показано існування граничного генератора марковського процесу з нелінійним нормуванням.

Отримані результати опубліковано у працях [28], [29], [56], [57], [61].

2.1 Еволюція стохастичних систем

Вимірний простір задається двома множинами $E,\xi.$ Множина E є сукупністю фазових станів системи, а ξ - борелева алгебра виділених підмножин з $E,$ що визначають спостережні сукупності станів [41].

Борелева алгебра ξ має такі властивості:

1. Для кожної зліченної послідовності множин $A_n \in \xi, n \geq 1$ $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \xi;$
2. Для кожної зліченної послідовності множин $A_n \in \xi, n \geq 1$ $\bigcap_{n\geq 1} A_n \in \xi.$

З плином часу відбуваються зміни станів системи. В цьому проявляється еволюція стохастичної системи. Виділяють дві різні форми еволюції: неперервність і дискретність (стрибковість). Можлива також змішана форма еволюції з неперервною і стрибковою формами.

Стрибкова зміна станів системи означає, що в кожному стані система перебуває скінченний час і потім стрибком миттєво переходить у новий стан. Навіть коли в реальній системі перехід з одного стану в інший відбувається протягом певного часу, а перехідні стани неспостережні або не використовуються в аналізі, то й тоді час переходу можна включити в час перебування в даному стані, а сам перехід вважати миттєвим.

Неперервна зміна станів означає, що існує скінченна миттєва швидкість переходу, а множина станів являє топологічний простір, яким можна вважати скінченно-вимірний евклідовий простір.

Основне припущення про еволюцію системи - це стохастичність еволюції системи в часі, що означає випадковий характер зміни станів системи і випадкову тривалість часу перебування в станах.

Стохастичність системи означає, що миттєва зміна станів системи відбувається з певними ймовірностями переходів, а час перебування в станах є випадковими величинами з певними функціями розподілу.

2.2 Зведено-оборотні оператори

Розглянемо простір Банаха B та лінійний оператор $Q:\mathrm{B}\to\mathrm{B}$ [41].

Оператор Q називають обмеженим, якщо існує деяка константа $C>0$, така що $\|Q\varphi\|\le C\|\varphi\|,\ \varphi\in D_Q$, де

$$D_Q=\{\varphi:\varphi\in\mathrm{B}, Q\varphi\in\mathrm{B}\} \text{ - область визначення оператора } Q.$$

Розглянемо наступні підпростори:

$$R_Q=\{\psi:\psi=Q\varphi,\varphi\in\mathrm{B}\} \text{ - підпростір значень } Q,$$

$$N_Q=\{\varphi:Q\varphi=0,\varphi\in\mathrm{B}\} \text{ - підпростір нулів } Q.$$

Означення 2.1. Лінійний обмежений оператор Q називається зведено-оборотним, якщо банаховий простір розкладається у пряму суму двох підпросторів

$$\mathrm{B}=N_Q\oplus R_Q,$$

де підпростір нулів має нетривіальну розмірність

$$\dim N_Q \geq 1.$$

Розглянемо проектор Π на підпростір N_Q

$$\Pi\varphi = \begin{cases} \varphi, \varphi \in N_Q, \\ 0, \varphi \in R_Q. \end{cases}$$

При цьому оператор $I - \Pi$ є проектором на підпростір R_Q

$$(I - \Pi)\varphi = \begin{cases} \varphi, \varphi \in R_Q, \\ 0, \varphi \in N_Q. \end{cases}$$

Означення 2.2. Лінійний обмежений оператор Q називається нормально-розв'язним, якщо рівняння

$$Q\varphi = \psi,\ \varphi \in R_Q,$$

має розв'язок для будь-якого $\psi \in R_Q$.

Варто зазначити, що зведено-оборотний оператор є нормально-розв'язним.

Розглянемо потенціал для зведено-оборотного оператора Q.

Означення 2.3. Потенціалом (або потенціальним оператором) зведено-оборотного оператора Q називається оператор

$$R_0 = [Q + \Pi]^{-1} - \Pi.$$

Потенціал має наступні властивості:

1. $QR_0 = R_0 Q = I - \Pi,$
2. $R_0\Pi = \Pi R_0 = 0,$
3. $QR_0^n = R_0^n Q = R_0^{n-1},$
4. $\| R_0 \| = \| Q_0^{-1} \|.$

2.3. Збурення зведено-оборотних операторів

Сингулярно-збурений зведено-оборотний оператор Q визначається виразом [41]

$$L^{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} Q + Q_1,$$

де Q_1 - обмежений збурюючий оператор, $\varepsilon \to 0.$

Проблема сингулярного збурення зведено-оборотного оператора полягає у тому, що необхідно побудувати такий вектор

$$\varphi^{\varepsilon} = \varphi + \varepsilon\varphi_1$$

та вектор ψ, які задовольняють наступне асимптотичне зображення

$$[\varepsilon^{-1}Q + Q_1]\varphi^{\varepsilon} = \psi + \varepsilon\theta^{\varepsilon},$$

де вектор θ^{ε} має обмежену норму при $\varepsilon \to 0$:

$$\| \theta^{\varepsilon} \| \le C < \infty.$$

Підставимо вектор φ^{ε} у задачу сингулярного збурення

$$[\varepsilon^{-1}Q + Q_1](\varphi + \varepsilon\varphi_1) = \varepsilon^{-1}Q\varphi + [Q\varphi_1 + Q_1\varphi] + \varepsilon Q_1\varphi_1.$$

Прирівнюючи праві частини рівностей, отримаємо

$$\begin{cases} Q\varphi = 0, \\ Q\varphi_1 + Q_1\varphi = \psi, \\ Q_1\varphi_1 = \theta^{\varepsilon}. \end{cases}$$

З першого рівняння отримуємо, що $\varphi \in N_Q$, а з третього рівняння $\varphi_1 \in D_{Q_1}$.

Тому необхідно розв'язати друге рівняння

$$Q_1\varphi = \psi - Q\varphi_1.$$

З умови розв'язності для зведено-оборотного оператора

$$\Pi Q \Pi \varphi_1 = 0 = \Pi\psi - \Pi Q_1 \Pi\varphi.$$

Оператор $\Pi Q \Pi \varphi_1$ діє у підпросторі N_Q, тому можна ввести зведений оператор $\hat{Q}_1$ на зведеному підпросторі $\hat{N}_Q$:

$$\Pi Q_1 \Pi = \hat{Q}_1 \Pi.$$

Позначимо $\hat{\psi} = \hat{\Pi}\psi \in N_Q$.

Перепишемо останнє рівняння

$$\hat{\psi} = \hat{Q}_1\hat{\varphi}.$$

Розв'яжемо друге рівняння системи відносно φ_1 :

$$\varphi_1 = R_0(Q_1\varphi - \psi),\ \Pi\varphi_1 = 0.$$

Отже,

$$\varphi_1 = R_0 \tilde{Q}_1 \varphi,$$

де

$$\tilde{Q}_1 = Q_1 - \hat{Q}_1.$$

Знайдемо θ^{ε}:

$$\theta^{\varepsilon} = Q_1 \varphi_1 = Q_1 R_0 \tilde{Q}_1 \varphi.$$

Таким чином, знайдено функції, що задовольняють розв'язок задачі сингулярного збурення

$$\begin{cases} \varphi_1 = R_0 \tilde{Q}_1 \varphi, \\ \hat{\psi} = \hat{Q}_1 \hat{\varphi}, \\ \theta^{\varepsilon} = Q_1 \varphi_1 = Q_1 R_0 \tilde{Q}_1 \varphi. \end{cases}$$

Розглянемо задачу сингулярного збурення у випадку нелінійного нормування

$$L^{\varepsilon} = \frac{Q}{g_1(\varepsilon) g_2(\varepsilon)} + \frac{Q_1}{g_2(\varepsilon)} + \frac{Q_2}{g_1(\varepsilon)}$$

$$\varphi^{\varepsilon} = \varphi + g_1(\varepsilon)\varphi_1 + g_2(\varepsilon)\varphi_2$$

Таким чином

$$L^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon} = \left(\frac{Q}{g_1(\varepsilon) g_2(\varepsilon)} + \frac{Q_1}{g_2(\varepsilon)} + \frac{Q_2}{g_1(\varepsilon)} \right) \left(\varphi + g_1(\varepsilon)\varphi_1 + g_2(\varepsilon)\varphi_2 \right)$$

Спростивши вирази, отримаємо

$$\begin{cases} Q\varphi = 0, \\ Q\varphi_2 + Q_2\varphi = 0, \\ Q_1\varphi + Q\varphi_1 = 0, \\ Q_1\varphi_2 + Q_2\varphi_1 = \psi. \end{cases}$$

2.4. Марковські процеси

Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \Im, P)$ на якому існує потік σ-алгебр ($\Im_t, t \geq 0$), тобто монотонно зростаюча сукупність σ-алгебр. $\Im_t$ трактується як сукупність подій, що можуть спостерігатися до моменту часу t включно.

Означення 2.4. Випадковий процес $x(t,w)$ з фазовим простором $(X,\mathscr{B})$, узгоджений з потоком $\Im_t$, називається марковським процесом, якщо виконується умова: для всіх $B\in\mathscr{B}$ та $s<t$

$$P\{x(t,w)\in B\,|\,\Im_s\}=P\{x(t,w)\in B\,|\,x(s,w)\}.$$

Вираз $P\{x(t,w)\in B\,|\,x(s,w)\}$ є вимірною функцією, тому його можна розглядати, як результат підстановки $x(s,w)$ у деяку функцію $P(s,x,t,B)$ замість x. Якщо цю функцію можна вибрати так, щоб задовольнялись умови:

1. $P(s,x,t,B)$ вимірна за x,
2. $P(s,x,t,B)$ - ймовірнісна міра на $\mathscr{B}$ за B,
3. Рівняння Колмогорова-Чепмена: для $x\in X,\ 0\le s<t<u,\ B\in\mathscr{B}$

$$P(s,x,u,B)=\int P(s,x,t,dy)P(t,y,u,B),$$

то випадковий процес $x(t,w)$ називається марковським процесом у вузькому сенсі.

Означення 2.5. Марковський процес називається чисто-розривним, якщо виконуються умови

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1-P(t,x,t+h,\{x\}))=\lambda(t,x),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P(t,x,t+h,B)=g(t,x,B),\ x\in B,\ B\in\mathscr{B}.$$

2.5. Рівномірно-неперервна напівгрупа

Нехай B_X - сукупність усіх $\mathscr{B}$-вимірних функцій $f(x), x\in R.$ Утворений лінійний простір є простором Банаха, якщо

$$\|f\|=\sup_x|f(x)|.$$

Нехай для $f\in B_X$

$$T_t f(x)=\int f(y)P(t,x,dy).$$

Дана функція є обмеженою та $\mathscr{B}$-вимірною. З рівняння Колмогорова-Чепмена випливає, що

$$T_{t+s} f = T_t T_s f.$$

Дана рівність означає, що оператори $\{T_t, t \geq 0\}$ утворюють напівгрупу.

Означення 2.6. Напівгрупа T_t називається рівномірно неперервною, якщо $\| T_t - I \| \to 0$ при $t \to 0$.

Теорема 2.1. Нехай T_t - рівномірно неперервна напівгрупа. Тоді виконуються наступні твердження

1. Існує $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(T_h - I) = A$, (A - інфінітезимальний оператор),
2. T_t задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt} T_t = AT_t = T_t A,$$

3. T_t зображається формулою

$$T_t = \exp\{tA\} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n.$$

2.6. Зображення марковського процесу через генератор напівгрупи

Нехай $x(t), t \geq 0$ - марковський процес на стандартному фазовому просторі (E, ξ), означений за допомогою генератора [41]

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E (\varphi(y) - \varphi(x)) P(x, dy), \; x \in E, \varphi(u) \in B_E.$$

Напівмарковське ядро

$$Q(x, B, t) = P(x, B)(1 - e^{-q(x)t}), \; x \in E, B \in \xi, t \geq 0,$$

визначає марковський процес відновлення $(x_k, \tau_k), k \geq 0$, де x_k - вкладений ланцюг Маркова, заданий стохастичним ядром

$$P(x, B) = P(x_{k+1} \in B \mid x_k = x),$$

а τ_k - точковий момент стрибків, що визначається функцією розподілу часу перебування $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$,

$$P(\theta_{k+1} \le t \mid x_k = x) = 1 - e^{-q(x)t}.$$

Позначимо через $\nu(t)$ рахуючий стрибковий процес

$$\nu(t) = \max\{k \ge 0 : \tau_k \le t\}.$$

Даний марковський процес є рівномірно ергодичним [41] зі стаціонарним розподілом $\pi(A), A \in \xi.$

Означення 2.7. Марковський процес відновлення – це двохкомпонентний марковський ланцюг $(x_{n,}\tau_n), n \ge 0$ визначений на просторі $(E \times R_+, \xi \oplus B_+),$ де τ_n - моменти відновлення.

Нехай даний процес є однорідним по другій компоненті, а перехідні ймовірності визначаються напівмарковським ядром

$$Q(x,B,t) = P(x,B)F_x(t),\ x \in E, B \in \xi, t \ge 0,$$

наступним співвідношенням

$$Q(x,B,t) = P(x_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \le t \mid x_n = x) = P(x_{n+1} \in B \mid x_n = x)P(\theta_{n+1} \le t \mid x_n = x),$$

де

$$\theta_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n.$$

Означення 2.8. Напівмарковським процесом, асоційованим з марковським процесом відновлення $(x_{n,}\tau_n), n \ge 0,$ називається випадковий процес

$$x(t) = x_{\nu(y)},$$

де

$$\nu(t) = \sup\{n \ge 0 : \tau_n \le t\}.$$

Даний процес є рівномірно ергодичним з стаціонарним розподілом

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q = \frac{1}{m}, m = \int_E \rho(dx)m(x),$$

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx)P(x,B), \rho(E) = 1.$$

2.7. Процеси з незалежними приростами

Означення 2.9. Нехай випадковий процес $x(t), t \geq 0,$ приймає значення з простору $(X, \mathscr{B}),$ $t_0 < t_1 < ... < t_n.$ Тоді $x(t)$ називається процесом з незалежними приростами, якщо $x(t_0), x(t_1) - x(t_0), .., x(t_n) - x(t_{n-1})$ - незалежні.

Марковські процеси з незалежними приростами в евклідовому просторі R^d визначаються за допомогою генератора [41]

$$\Gamma\varphi(u) = b\varphi'(u) + \int_{R^d} (\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)) \mathrm{I}_{\{|v| \leq 1\}})\Gamma(dv),$$

Функція $\varphi(u)$ двічі диференційована в R^d, дорівнює 0 в нескінченості, з sup-нормою $\|\varphi\| = \sup|\varphi(u)|,\ u \in R^d$.

$$b = \int_{R^d} v\Gamma(dv),$$

$\Gamma(dv)$ - ядро інтенсивності, що задовольняє умову

$$\Gamma(\{0\}) = 0.$$

2.8. Нелінійне нормування генератора марковського процесу в апроксимації Пуассона

Розглянемо сім'ю процесів з незалежними приростами $\eta_1^\varepsilon(\cdot)$ і траєкторіями в області визначення $D_R[0;\infty)$, які залежать від малого параметра ε та нормуються нелінійною функцією $g_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$

$$\eta_1^\varepsilon(t) = \eta\left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)}\right),\ \ t \geq 0,$$

де $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами, при цьому $\eta_1^\varepsilon(t)$ визначається генератором

$$\Gamma_1^\varepsilon\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv).$$

Функція $\varphi(u)$ двічі диференційована в R дорівнює прямує до нуля на нескінченості, з sup-нормою $\|\varphi\| = \sup_{u \in R} |\varphi(u)|$. Ядро інтенсивності $\Gamma^{\varepsilon}(dv)$ діє на функції з класу $C_0^3(R)$ та задовільняє умову

$$\Gamma^{\varepsilon}(\{0\}) = 0.$$

Нехай виконуються умови апроксимації Пуассона

(P1) Апроксимація середніх

$$b_{\varepsilon} = \int_R v \Gamma^{\varepsilon}(dv) = g_1(\varepsilon)(b + \Theta_b^{\varepsilon})$$

та

$$c_{\varepsilon} = \int_R v^2 \Gamma^{\varepsilon}(dv) = g_1(\varepsilon)(c + \Theta_c^{\varepsilon}),$$

де

$|b| < \infty,\ 0 < c < \infty,\ \left|\Theta_b^{\varepsilon}\right| \to 0,\ \left|\Theta_c^{\varepsilon}\right| \to 0,\ g_1(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0.$

(P2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^{\varepsilon} = \int_R q(v) \Gamma^{\varepsilon}(dv) = g_1(\varepsilon)(\Gamma_q + \Theta_g^{\varepsilon}),$$

де Γ_q визначається наступним співвідношенням

$$\Gamma_q = \int_R q(v) \Gamma^0(dv)$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R),$ таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

(P3) В граничному генераторі виконується наступна умова

$$\int_R v^2 \Gamma^0(dv) > 0.$$

(P4) Має місце співвідношення

$$\lim_{c \to \infty} \int_{|v|>c} v^2 \Gamma^0(dv) = 0.$$

Приклад 2.1. Розглянемо сімейство випадкових величин α^{ε}, що задовольняє умови апроксимації Пуассона:

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = \alpha\} = \sin(\varepsilon) p,$$

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = \sin(\varepsilon)\beta\} = 1 - \sin(\varepsilon) p.$$

Знайдемо перший момент

$$E\alpha^{\varepsilon} = \alpha \sin(\varepsilon) p + \sin(\varepsilon)\beta - \sin^2(\varepsilon)\beta p =$$

$$= \sin(\varepsilon)(\alpha p + \beta) - \sin^2(\varepsilon)\beta p =$$

$$= \sin(\varepsilon)(\alpha p + \beta) - O(\sin^2(\varepsilon)).$$

Знайдемо другий момент

$$E(\alpha^{\varepsilon})^2 = \alpha^2 \sin(\varepsilon) p + (\sin(\varepsilon)\beta)^2 - \sin^3(\varepsilon)\beta^2 p =$$

$$= \sin(\varepsilon)\alpha^2 p + O(\sin^2(\varepsilon)).$$

Таким чином, параметри апроксимації Пуассона мають наступний вигляд

$$\begin{cases} g_1(\varepsilon) = \sin(\varepsilon), \\ b = \alpha p + \beta, \\ c = \alpha^2 p. \end{cases}$$

Твердження 2.1. Генератор процесу з незалежними приростами

$$\Gamma_1^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv)$$

в схемі апроксимації Пуассона має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_1^{\varepsilon}\varphi(u) = b\varphi`(u) + \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi`(u)]\Gamma^{0}(dv) + \Theta^{\varepsilon}\varphi,$$

$\left|\Theta^{\varepsilon}\right| \to 0,\ \ g_1(\varepsilon) \to 0,$ при $\varepsilon \to 0.$

Доведення. Розглянемо генератор процесу

$$\Gamma_1^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv) =$$

$$= (g_1(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi`(u) - \frac{v^2}{2}\varphi``(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv) +$$

$$+ (g_1(\varepsilon))^{-1}\int_R v\varphi`(u)\Gamma^{\varepsilon}(dv) + \frac{(g_1(\varepsilon))^{-1}}{2}\int_R v^2\varphi`(u)\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Функция $\psi_u(v) = \varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi`(u) - \frac{v^2}{2}\varphi``(u)$ належить класу $C^3(R).$ Окрім цього, дана функція неперервна та обмежена для всіх $\varphi(u) \in C_0^2(R)$ при умові (P1).

З умов (P1), (P2) отримуємо

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi`(u) - \frac{v^2}{2}\varphi``(u)]\Gamma^0(dv) + b\varphi`(u) +$$

$$+\frac{c}{2}\varphi``(u) + \Theta_b^{\varepsilon} + \Theta_c^{\varepsilon} + \Theta_{\psi}^{\varepsilon}$$

Застосовуючи умову (Р3) отримуємо наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = b\varphi`(u) + \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi`(u)]\Gamma^0(dv) + \Theta^{\varepsilon}\varphi.$$

Твердження доведено.

Приклад 2.2. Розглянемо процес Пуассона $\xi\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$ з параметром λ,

$$P\{\xi\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = k\} = \frac{\left(\lambda\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)^k e^{-\lambda\frac{t}{g(\varepsilon)}}}{k!}, k = 0,1,...$$

Знайдемо представлення генератора

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)}\int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)]F(dv).$$

2.9. Нелінійне нормування генератора марковського процесу в апроксимації Леві

Розглянемо сім'ю процесів з незалежними приростами $\eta_2^{\varepsilon}(t)$, які залежать від малого параметра ε та нормуються нелінійною функцією $g_2(\varepsilon)$, де $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon))$

$$\eta_2^{\varepsilon}(t) = \eta(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}),\ \ t \geq 0,$$

де $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами, при цьому $\eta_2^{\varepsilon}(t)$ визначається генератором

$$\Gamma_2^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv),$$

де $g_2(\varepsilon) \to 0$ при $g_1(\varepsilon) \to 0$, Функція $\varphi(u)$ двічі диференційована в R дорівнює прямує до нуля на нескінчeності, з sup-нормою $\|\varphi\| = \sup_{u\in R}|\varphi(u)|$. Ядро інтенсивності $\Gamma^{\varepsilon}(dv)$ діє на функції з класу $C_0^3(R)$ та задовільняє умову

$$\Gamma^{\varepsilon}(\{0\}) = 0.$$

Нехай виконуються умови апроксимації Леві:

(L1) Апроксимація середніх

$$b_{\varepsilon} = \int_R v\Gamma^{\varepsilon}(dv) = b_1 g_1(\varepsilon) + g_2(\varepsilon)(b + \Theta_b^{\varepsilon})$$

та

$$c_{\varepsilon} = \int_R v^2\Gamma^{\varepsilon}(dv) = g_2(\varepsilon)(c + \Theta_c^{\varepsilon})$$

де

$$|b| < \infty,\ 0 < c < \infty,\ \left|\Theta_b^{\varepsilon}\right| \to 0,\ \left|\Theta_c^{\varepsilon}\right| \to 0.$$

(L2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^{\varepsilon} = \int_R q(v)\Gamma^{\varepsilon}(dv) = g_2(\varepsilon)(\Gamma_q + \Theta_g^{\varepsilon}),$$

де Γ_q визначається наступним співвідношенням

$$\Gamma_q = \int_R q(v)\Gamma^0(dv)$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R)$, таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0$, коли $v \to 0$.

(L3) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma^0(dv) = 0.$$

Приклад 2.3. Розглянемо сімейство випадкових величин α^{ε}:

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = g_1(\varepsilon)\alpha_1\} = p_0 - g_2(\varepsilon)p_1,$$

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = g_2(\varepsilon)\alpha\} = q_0,\ p_0 + q_0 = 1,$$

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = d\} = g_2(\varepsilon)p_1.$$

$$g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon)),\ g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Перевіримо умови апроксимації Леві.

Знайдемо перший та другий моменти для α^{ε}:

$$b_\varepsilon = E\alpha^\varepsilon = p_0 g_1(\varepsilon)\alpha_1 - g_1(\varepsilon)g_2(\varepsilon)\alpha_1 p_1 + q_0 g_2(\varepsilon)\alpha + g_2(\varepsilon)p_1 d =$$

$$= g_1(\varepsilon)(p_0\alpha_1) + g_2(\varepsilon)(\alpha q_0 + p_1 d) + o(g_2(\varepsilon)).$$

$$c_\varepsilon = E(\alpha^\varepsilon)^2 = g_1^2(\varepsilon)\alpha_1(p_0 - g_2(\varepsilon)p_1) + g_2^2(\varepsilon)\alpha^2 q_0 + d^2 g_2(\varepsilon)p_1 =$$

$$= g_2(\varepsilon)(d^2 p_1) + o(g_2(\varepsilon)).$$

Таким чином, ми отримали параметри умови (L1):

$$b_1 = p_0\alpha_1,$$

$$b = \alpha q_0 + p_1 d,$$

$$c = p_1 d^2.$$

Знайдемо ядро інтенсивностей

$$\Gamma_q^\varepsilon = q(g_1(\varepsilon)\alpha_1)p_0 + q(g_2(\varepsilon)\alpha)q_0 - q(g_1(\varepsilon)\alpha_1)g_2(\varepsilon)p_1 + q(d)g_2(\varepsilon)p_1 =$$

$$= g_2(\varepsilon)(q(d)p_1) + o(g_2(\varepsilon)).$$

Отже, $\Gamma_q = q(d)p_1$

В результаті знайдено всі параметри для α^ε в схемі апроксимації Леві.

Приклад 2.4. Розглянемо сімейство випадкових величин α^ε:

$$P\{\alpha^\varepsilon = tg(\varepsilon)\alpha_1\} = p_0 - tg^2(\varepsilon)p_1,$$

$$P\{\alpha^\varepsilon = tg^2(\varepsilon)\alpha\} = q_0,\ p_0 + q_0 = 1,$$

$$P\{\alpha^\varepsilon = d\} = tg^2(\varepsilon)p_1.$$

Перевіримо умови апроксимації Леві.

Знайдемо перший та другий моменти для α^ε:

$$b_\varepsilon = E\alpha^\varepsilon = p_0 tg(\varepsilon)\alpha_1 - tg^3(\varepsilon)\alpha_1 p_1 + q_0 tg^2(\varepsilon)\alpha + tg^2(\varepsilon)p_1 d =$$

$$= tg(\varepsilon)(p_0\alpha_1) + tg^2(\varepsilon)(\alpha q_0 + p_1 d) + O(tg^2(\varepsilon)).$$

$$c_\varepsilon = E(\alpha^\varepsilon)^2 = tg^2(\varepsilon)\alpha_1(p_0 - tg^2(\varepsilon)p_1) + tg^4(\varepsilon)\alpha^2 q_0 + d^2 tg^2(\varepsilon)p_1 =$$

$$= tg^2(\varepsilon)(d^2 p_1) + O(tg^2(\varepsilon)).$$

Таким чином, ми отримали параметри умови (L1):

$$g_1(\varepsilon) = tg(\varepsilon),$$

$$g_2(\varepsilon) = tg^2(\varepsilon),$$

$$b_1 = p_0\alpha_1,$$

$$b = \alpha q_0 + p_1 d,$$

$$c = p_1 d^2.$$

Знайдемо ядро інтенсивностей

$$\Gamma_q^{\varepsilon} = q(tg(\varepsilon)\alpha_1)p_0 + q(tg^2(\varepsilon)\alpha)q_0 - q(tg(\varepsilon)\alpha_1)g_2(\varepsilon)p_1 + q(d)tg^2(\varepsilon)p_1 =$$

$$= tg^2(\varepsilon)(q(d)p_1) + O(tg^2(\varepsilon)).$$

Отже,

$$\Gamma_q = q(d)p_1.$$

Таким чином, знайдено всі параметри для α^{ε} в схемі апроксимації Леві.

Твердження 2.2. Генератор процесу з незалежними приростами

$$\Gamma_2^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv)$$

в схемі апроксимації Леві має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_2^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} b_1 \varphi`(u) + (b - b_0)\varphi`(u) + \frac{c - c_0}{2}\varphi``(u) +$$

$$+ \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi`(u)]\Gamma^0(dv) + \Theta^{\varepsilon}\varphi,$$

де

$$b_0 = \int_R v\Gamma^0(dv), \ \ c_0 = \int_R v^2\Gamma^0(dv), \ \ \left|\Theta^{\varepsilon}\varphi\right| \to 0, \ g_2(\varepsilon) \to 0, \ \ g_1(\varepsilon) \to 0, \ \ \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Розглянемо генератор процесу

$$\Gamma_2^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv) =$$

$$= (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi`(u) - \frac{v^2}{2}\varphi``(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv) +$$

$$+ (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R v\varphi`(u)\Gamma^{\varepsilon}(dv) + \frac{(g_2(\varepsilon))^{-1}}{2}\int_R v^2\varphi`(u)\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Функция $\psi_u(v) = \varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi`(u) - \frac{v^2}{2}\varphi``(u)$ належить класу $C^3(R)$. Окрім цього, дана функція неперервна та обмежена для всіх $\varphi(u) \in C_0^2(R)$ при умові (L1).

З умов (L1), (L2) отримуємо

$$\Gamma_2^\varepsilon \varphi(u) = \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi`(u) - \frac{v^2}{2}\varphi``(u)]\Gamma^0(dv) + b_1(g_1(\varepsilon))^{-1}\varphi`(u) +$$

$$+ b\varphi`(u) + \frac{c}{2}\varphi``(u) + \Theta_b^\varepsilon + \Theta_c^\varepsilon + \Theta_\psi^\varepsilon$$

Застосовуючи умову (L3) отримуємо асимптотичне зображення

$$\Gamma_2^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} b_1 \varphi`(u) + (b - b_0)\varphi`(u) + \frac{c - c_0}{2}\varphi``(u) +$$

$$+ \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi`(u)]\Gamma^0(dv) + \Theta^\varepsilon \varphi.$$

Твердження доведено.

2.10. Нелінійне нормування генератора марковського процесу в апроксимації Пуассона в просторі R^d

Розглянемо сім'ю процесів з незалежними приростами $\eta_1^\varepsilon(\cdot)$ і траєкторіями в області визначення $D_R[0;\infty)$, які залежать від малого параметра ε, нормуються нелінійною функцією $g_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$

$$\eta_1^\varepsilon(t) = \eta(\frac{t}{g_1(\varepsilon)}), \ \ t \geq 0,$$

де $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами, при цьому $\eta_1^\varepsilon(t)$ визначається генератором

$$\Gamma_1^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv).$$

Функція $\varphi(u)$ двічі диференційована в R^d, дорівнює прямує до нуля на нескінченості, з sup-нормою $\|\varphi\| = \sup|\varphi(u)|, \ u \in R^d, u = (u_1, u_2, ..., u_r)$. Ядро інтенсивності $\Gamma^\varepsilon(dv)$ діє на функції з класу $C_0^3(R)$ та задовільняє умову

$$\Gamma^\varepsilon(\{0\}) = 0.$$

Нехай виконуються умови апроксимації Пуассона

(P1) Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = \int_{R^d} v\Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)(\sum_{k=1}^d b_k + \Theta_b^\varepsilon)$$

та

$$c_\varepsilon = \int_{R^d} v^2 \Gamma^\varepsilon (dv) = g_1(\varepsilon)(\sum_{k,r=1}^{d} c_k c_r + \Theta_c^\varepsilon)$$

де

$$v = (v_1, v_2, ..., v_r), |b| < \infty, \ 0 < c < \infty, \ \left|\Theta_b^\varepsilon\right| \to 0, \ \left|\Theta_c^\varepsilon\right| \to 0,$$

$$g_1(\varepsilon) \to 0 \text{, при } \varepsilon \to 0.$$

(Р2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^\varepsilon = \int_{R^d} q(v) \Gamma^\varepsilon (dv) = g_1(\varepsilon)(\Gamma_q + \Theta_g^\varepsilon),$$

де Γ_q визначається наступним співвідношенням

$$\Gamma_q = \int_{R^d} q(v) \Gamma^0 (dv)$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R),$ таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

(Р3) В граничному генераторі виконується наступна умова

$$\int_{R^d} |v|^2 \Gamma^0 (dv) > 0.$$

(Р4) Має місце співвідношення

$$\lim_{c \to \infty} \int_{|v| > c} |v|^2 \Gamma^0 (dv) = 0.$$

Твердження 2.3. Генератор процесу з незалежними приростами

$$\Gamma_1^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon (dv)$$

в схемі апроксимації Пуассона має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_1^\varepsilon \varphi(u) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} + \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u) - \sum_{k=1}^{d} v_k \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k}] \Gamma^0 (dv) + \Theta^\varepsilon \varphi,$$

$\left|\Theta^\varepsilon\right| \to 0, \ \ g_1(\varepsilon) \to 0,$ при $\varepsilon \to 0.$

Доведення. Розглянемо генератор процесу

$$\Gamma_1^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon (dv) =$$

$$=(g_1(\varepsilon))^{-1}\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}]\Gamma^{\varepsilon}(dv)+$$

$$+(g_1(\varepsilon))^{-1}\int_{R^d}\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\Gamma^{\varepsilon}(dv)+\frac{(g_1(\varepsilon))^{-1}}{2}\int_{R^d}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Функція $\psi_u(v)=\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}$ належить класу $C^3(R^d)$. Окрім цього, дана функція неперервна та обмежена для всіх $\varphi(u)\in C_0^2(R^d)$ при умові (P1).

З умов (P1), (P2) отримуємо

$$\Gamma_1^{\varepsilon}\varphi(u)=\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}]\Gamma^0(dv)+$$

$$\sum_{k=1}^{d}b_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}c_kc_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}+\Theta_b^{\varepsilon}+\Theta_c^{\varepsilon}+\Theta_{\psi}^{\varepsilon}$$

Застосовуючи умову (P3) отримуємо наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u)=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}]\Gamma^0(dv)+\Theta^{\varepsilon}\varphi.$$

Твердження доведено.

2.11. Нелінійне нормування генератора марковського процесу в апроксимації Леві в просторі R^d

Розглянемо сім’ю процесів з незалежними приростами $\eta_2^{\varepsilon}(t)$ і траєкторіями в області визначення $D_{R^d}[0;\infty)$, які залежать від малого параметра ε, нормуються нелінійною функцією $g_2(\varepsilon)$, де $g_2(\varepsilon)=o(g_1(\varepsilon))$

$$\eta_2^{\varepsilon}(t)=\eta(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}),\ \ t\ge 0,$$

де $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами, при цьому $\eta_2^{\varepsilon}(t)$ визначається генератором

$$\Gamma_2^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Функція $\varphi(u)$ двічі диференційована в R^d, прямує до нуля на нескінченості, з sup-нормою $\|\varphi\| = \sup|\varphi(u)|,\ u \in R^d$. Ядро інтенсивності $\Gamma^\varepsilon(dv)$ діє на функції з класу $C_0^3(R)$ та задовільняє умову

$$\Gamma^\varepsilon(\{0\}) = 0.$$

Нехай виконуються умови апроксимації Леві:

(L1) Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = \int_{R^d} v\Gamma^\varepsilon(dv) = g_1(\varepsilon)\sum_{k=1}^{d} b_k^1 + g_2(\varepsilon)(\sum_{k=1}^{d} b_k + \Theta_b^\varepsilon)$$

та

$$c_\varepsilon = \int_{R^d} vv^T\Gamma^\varepsilon(dv) = g_2(\varepsilon)(\sum_{k,r=1}^{d} c_k c_r + \Theta_c^\varepsilon)$$

де

$$v = (v_1, v_2, ..., v_r),\ \ |\Theta_b^\varepsilon| \to 0,\ \ |\Theta_c^\varepsilon| \to 0,\ g_2(\varepsilon) \to 0, g_1(\varepsilon) \to 0.$$

(L2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^\varepsilon = \int_{R^d} q(v)\Gamma^\varepsilon(dv) = g_2(\varepsilon)(\Gamma_q + \Theta_g^\varepsilon),$$

де Γ_q визначається наступним співвідношенням

$$\Gamma_q = \int_{R^d} q(v)\Gamma^0(dv)$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R)$, таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0$, коли $v \to 0$.

(L3) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} |v|^2 \Gamma^0(dv) = 0.$$

Твердження 2.4. Генератор процесу з незалежними приростами

$$\Gamma_2^\varepsilon\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_{R^d} [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv)$$

в схемі апроксимації Леві має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_2^\varepsilon\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\sum_{k=1}^{d} b_k^1 \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{d}(b_k - b_k^0)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} + \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}(c_k - c_k^0)\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k \partial u_r} +$$

$$+\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}]\Gamma^0(dv)+\Theta^{\varepsilon}\varphi,$$

де

$$b_0=\int_{R^d}v\Gamma^0(dv),\ c_0=\int_{R^d}vv^T\Gamma^0(dv),\ \left|\Theta^{\varepsilon}\varphi\right|\to 0,\ g_2(\varepsilon)\to 0,\ \ g_1(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

Доведення. Розглянемо генератор процесу

$$\Gamma_2^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv)=$$

$$=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial v_k}]\Gamma^{\varepsilon}(dv)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_{R^d}\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}\Gamma^{\varepsilon}(dv)+\frac{(g_2(\varepsilon))^{-1}}{2}\int_{R^d}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial v_k}\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Функция $\psi_u(v)=\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial v_k}$ належить класу $C^3(R^d)$. Окрім цього, дана функція неперервна та обмежена для всіх $\varphi(u)\in C_0^2(R^d)$ при умові (L1).

З умов (L1), (L2) отримуємо

$$\Gamma_2^{\varepsilon}\varphi(u)=\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}-\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}v_kv_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial v_k}]\Gamma^0(dv)+$$

$$+(g_1(\varepsilon))^{-1}\sum_{k=1}^{d}b_k^1\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\sum_{k=1}^{d}b_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}c_kc_r\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial v_k}+\Theta_b^{\varepsilon}+\Theta_c^{\varepsilon}+\Theta_{\psi}^{\varepsilon}$$

Застосовуючи умову (L3) отримуємо асимптотичне зображення

$$\Gamma_2^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_1(\varepsilon))^{-1}\sum_{k=1}^{d}b_k^1\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\sum_{k=1}^{d}(b_k-b_k^0)\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{d}(c_k-c_k^0)\frac{\partial^2\varphi(u)}{\partial u_k\partial u_r}+$$

$$+\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}]\Gamma^0(dv)+\Theta^{\varepsilon}\varphi.$$

Твердження доведено.

2.12. Існування граничного генератора в апроксимації Пуассона

Розглянемо генератор марковського процесу пуассонової апроксимації, що нормується множником $g_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$

$$\Gamma_q^\varepsilon = g_1(\varepsilon)(\Gamma_q + \theta_q^\varepsilon).$$

Для генератора Γ_q^ε завжди існує такий граничний генератор Γ_q, що

$$\frac{\Gamma_q^\varepsilon - \Gamma_q}{g_1(\varepsilon)} = \Gamma_{1,q}$$

Знайдемо зображення генератора $\Gamma_{1,q}$

$$\frac{\Gamma_q^\varepsilon - \Gamma_q}{g_1(\varepsilon)} = \frac{g_1(\varepsilon)(\Gamma_q + \theta_q^\varepsilon) - \Gamma_q}{g_1(\varepsilon)} = \frac{g_1(\varepsilon)\Gamma_q + g_1(\varepsilon)\theta_q^\varepsilon - \Gamma_q}{g_1(\varepsilon)} = \frac{\Gamma_q(g_1(\varepsilon) - 1)}{g_1(\varepsilon)} + \theta_q^\varepsilon = \Gamma_{1,q}.$$

Виберемо такий нормуючий множник $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon))$, для якого виконується така умова:

$$\frac{\Gamma_q^\varepsilon - \Gamma_q - g_1(\varepsilon)\Gamma_{1,q}}{g_2(\varepsilon)} = \Gamma_{2,q}$$

Знайдемо зображення генератора $\Gamma_{2,q}$

$$\frac{\Gamma_q^\varepsilon - \Gamma_q - g_1(\varepsilon)\Gamma_{1,q}}{g_2(\varepsilon)} = \frac{\Gamma_q^\varepsilon - \Gamma_q - \Gamma_q(g_1(\varepsilon) - 1) - g_1(\varepsilon)\theta_q^\varepsilon}{g_2(\varepsilon)} =$$

$$= \frac{g_2(\varepsilon)\Gamma_q + g_2(\varepsilon)\theta_q^\varepsilon - \Gamma_q - \Gamma_q(g_1(\varepsilon) - 1) - g_1(\varepsilon)\theta_q^\varepsilon}{g_2(\varepsilon)} =$$

$$= \frac{\Gamma_q(g_2(\varepsilon) - 1 - g_1(\varepsilon) + 1) + \theta_q^\varepsilon(g_2(\varepsilon) - g_1(\varepsilon))}{g_2(\varepsilon)} =$$

$$= \frac{\Gamma_q(g_2(\varepsilon) - g_1(\varepsilon))}{g_2(\varepsilon)} + \frac{\theta_q^\varepsilon(g_2(\varepsilon) - g_1(\varepsilon))}{g_2(\varepsilon)} = \Gamma_{2,q}.$$

Отже,

$$\Gamma_q^\varepsilon - \Gamma = g_1(\varepsilon)\Gamma_{1,q} + g_2(\varepsilon)\Gamma_{2,q} + o(g_2(\varepsilon)) = \Gamma_q(g_1(\varepsilon) - 1) + g_1(\varepsilon)\theta_q^\varepsilon +$$

$$+ \Gamma_q(g_2(\varepsilon) - g_1(\varepsilon)) + \theta_q^\varepsilon(g_2(\varepsilon) - g_1(\varepsilon)) = \Gamma_q(g_2(\varepsilon) - 1) + g_2(\varepsilon)\theta_q^\varepsilon + o(g_2(\varepsilon)).$$

Це співвідношення містить доданок θ_q^ε. Знайдемо його з розв'язку задачі сингулярного збурення.

Для генератора марковського процесу, нормованого множником $g_2(\varepsilon)$, задача запишеться так:

$$\Gamma^\varepsilon = \Gamma + \Gamma_{1,q} g_2(\varepsilon)$$

$$\varphi^\varepsilon = \varphi + \varphi_1 g_2(\varepsilon).$$

Розв'язок задачі сингулярного збурення набуде вигляду

$$\Gamma^\varepsilon \varphi^\varepsilon = \Gamma\varphi + g_2(\varepsilon)(\Gamma\varphi_1 + \Gamma_{1,q}\varphi) + \varphi_1\Gamma_{1,q}(g_2(\varepsilon))^2 = \Gamma\varphi + g_2(\varepsilon)\psi + \theta^\varepsilon (g_2(\varepsilon))^2 = 0.$$

Звідси

$$\theta^\varepsilon = -\frac{\Gamma\varphi}{g_2^2(\varepsilon)} - \frac{\psi}{g_2(\varepsilon)}.$$

Висновки до розділу 2.

У другому розділі розглянуто сім'ю процесів з незалежними приростами $\eta_1^\varepsilon(\cdot)$ і траєкторіями в області визначення $D_R[0;\infty)$, які нормуються нелінійною функцією $g_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$

$$\eta_1^\varepsilon(t) = \eta(\frac{t}{g_1(\varepsilon)}),\ \ t \ge 0,$$

де $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами, що визначається генератором

$$\Gamma_1^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv).$$

Визначено умови пуассонової апроксимації та апроксимації Леві для відповідних генераторів, а також знайдено асимптотичне зображення генераторів випадкових процесів.

У випадку нормування в просторі R^d генератор процесу з незалежними приростами

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv)$$

в схемі апроксимації Пуассона має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = \sum_{k=1}^{d}\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k} + \int_{R^d}[\varphi(u+v)-\varphi(u)-\sum_{k=1}^{d}v_k\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_k}]\Gamma^{0}(dv) + \Theta^{\varepsilon}\varphi,$$

$\left|\Theta^{\varepsilon}\right| \to 0,\ \ g_1(\varepsilon) \to 0,$ при $\varepsilon \to 0.$

Знайдено асимптотичне зображення і для генератора в схемі апроксимації Леві.

Крім цього, показано існування граничного генератора.

РОЗДІЛ III
ПРОБЛЕМА ВЕЛИКИХ ВІДХИЛЕНЬ В СХЕМАХ НЕЛІНІЙНИХ АПРОКСИМАЦІЙ

У цьому розділі розглядається проблема великих відхилень. Розв'язок знаходиться через нелінійний експоненційний генератор, який відповідає напівгрупі Нісіо.

Генератори марковських процесів в проблемі великих відхилень розглядаються в схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві. Знайдено умови в схемах даних апроксимацій при нормуванні нелінійними функціями. Також, знайдено граничні генератори, що визначають розв'язок проблеми великих відхилень.

Отримані результати даного розділу опубліковано у працях [26], [59].

3.1 Проблема великих відхилень

Проблема великих відхилень виникла як метод розв'язання статистичних задач, пов'язаних з оцінкою ймовірностей рідкісних подій [43].

Постановка задачі: розглянемо послідовність випадкових величин $\{X_n\}$ в метричному просторі E. Тоді $\{X_n\}$ задовільняє принцип великих відхилень, якщо існує неперервна знизу функція $I: E \to [0;\infty)$ така, що для кожної відкритої множини A

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P\{X_n \in A\} \geq -\inf_{x\in A} I(x),$$

а для кожної замкненої множини B

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P\{X_n \in B\} \leq -\inf_{x\in B} I(x).$$

Функціонал I називають функціоналом дії.

Розв'язок проблеми великих відхилень можна знайти за допомогою нелінійного експоненційного генератора. Даний підхід передбачає наступні етапи:

1. Обчислення граничного експонеційного генератора, який визначає великі відхилення.
2. Визначення експоненійної компактності сім'ї дограничних процесів.
3. Визначення принципу порівняння для граничного генератора.
4. Конструкція варіаційного зображення функціоналу дії.

3.2 Мартингальна характеризація

Розглянемо марковський процес $x(t), t \geq 0$ на стандартному фазовому просторі (E, ξ) та генератор $L,$ визначений у банаховому просторі B. Нехай $C(E)$ - простір неперервних функцій, що належать простору Банаха [43].

Класична лінійна напівгрупа марковського процесу $x(t), t \geq 0$ задається наступним чином

$$L_t\varphi(u) = E[\varphi(x(t)) \mid x(0) = u],$$

а нелінійна напівгрупа

$$H_t\varphi(u) = \ln E[e^{\varphi(x(t))} \mid x(0) = u].$$

Перепишемо останнє співвідношення використовуючи класичну лінійну напівгрупу

$$H_t\varphi(u) = \ln L_t e^{\varphi(u)}.$$

Перевіримо чи $H_t\varphi(u)$ утворює напівгрупу

$$H_{t+s}\varphi(u) = \ln L_{t+s}e^{\varphi(u)} = \ln L_t L_s e^{\varphi(u)} = \ln L_t e^{\ln L_s \varphi(u)} =$$

$$= \ln L_t e^{H_s\varphi(u)} = H_t H_s \varphi(u).$$

Таким чином $H_t\varphi(u)$ утворює напівгрупу.

Розглянемо наступну лему [41].

Лема 3.1. Нелінійний експоненційний генератор, що відповідає напівгрупі

$$H_t\varphi(u) = \ln L_t e^{\varphi(u)}$$

має наступний вигляд

$$H\varphi(u) = e^{-\varphi(u)} L e^{\varphi(u)}, \;\; e^{\varphi(u)} \in L.$$

Для дослідження властивостей марковських процесів використовується мартингальна характеризація процесів. Для цього необхідно розглянути наступні мартингали

$$\mu_t = \varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t L\varphi(x(s))ds.$$

Проте, для розв'язку проблеми великих відхилень використовується експоненційна мартингальна характеризація процесів

$$\tilde{\mu}_t = \exp\{\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t H\varphi(x(s))ds\}.$$

Дані співвідношення є еквівалентними в умовах наступного твердження [41]:

Твердження 3.1. Нехай $x(t)$ та $y(t)$ є дійснозначними, неперервними справа випадковими процесами. Припустимо, що для будь-якого $t \inf_{s \le t} x(s) > 0.$

Тоді

$$\mu(t) = x(t) - \int_0^t y(s)ds$$

є локальним $\Im_t$-мартингалом тоді і тільки тоді, коли

$$\tilde{\mu}(t) = x(t)\exp\left\{-\int_0^t \frac{y(s)}{x(s)}ds\right\}$$

є локальним $\Im_t$-мартингалом.

Розв'язок проблеми великих відхилень знаходиться саме через нелінійний експоненційний генератор, оскільки даний генератор має тісний зв'язок з функціоналом дії. Отож, покажемо цей зв'язок.

Розглянемо марковський процес $x^{\varepsilon}(t), \;\; t \ge 0,$ де $\varepsilon \to 0.$ Розв'язок проблеми великих відхилень полягає у знаходженні функціонала дії $I(x).$ Даний функціонал можна визначити наступним чином

Означення 3.1.

$$-I(x)=\lim_{\delta\to 0}\liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln P\{x^{\varepsilon}(t)\in B_{\delta}(x)\}=\lim_{\delta\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln P\{x^{\varepsilon}(t)\in \overline{B}_{\delta}(x)\}.$$

Якщо дане співвідношення виконується для всіх $x\in E,$ то виконується слабкий принцип великих відхилень. Однак, за додаткової умови експоненційної компактності для марковського процесу $x^{\varepsilon}(t)$ виконується принцип великих відхилень.

Розглянемо наступне твердження, що визначає формулу Брика [41].

Твердження 3.2. Нехай марковський процес $x^{\varepsilon}(t),\ t\geq 0$ при $\varepsilon\to 0$ є експоненційно компактним в області визначення $D_E[0;\infty)$ та існує границя

$$\Lambda(\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln E[e^{\frac{\varphi(x^{\varepsilon}(t))}{\varepsilon}}]$$

для всіх $\varphi\in C(E)$.

Тоді $x^{\varepsilon}(t)$ задовольняє принцип великих відхилень з функціоналом дії

$$I(x)=\sup_{\varphi\in C(E)}\{\varphi(x)-\Lambda(\varphi)\}.$$

3.3 Нелінійний експоненційний генератор великих відхилень

Розглянемо нелінійну напівгрупу, за допомогою якої знаходиться розв'язок проблеми великих відхилень [43]

$$H_t^{\varepsilon}\varphi(u)=\varepsilon\ln Ee^{\frac{\varphi(x^{\varepsilon}(t))}{\varepsilon}}$$

Наступна лема визначає нелінійний експоненційний генератор

Лема 3.2. [41]. Нелінійний експоненційний генератор, що відповідає напівгрупі

$$H_t^{\varepsilon}\varphi(u)=\varepsilon\ln Ee^{\frac{\varphi(x^{\varepsilon}(t))}{\varepsilon}}$$

має вигляд

$$H^{\varepsilon}\varphi(u)=e^{-\frac{\varphi(u)}{\varepsilon}}\varepsilon L^{\varepsilon}e^{\frac{\varphi(u)}{\varepsilon}},$$

де $e^{\frac{\varphi(u)}{\varepsilon}} \in D(L^{\varepsilon})$.

Для розв'язання проблеми великих відхилень в класичному випадку використовується кумулянта процесу. Проте в схемі пуассонової апроксимації виникає потреба у використанні експоненційних генераторів. Визначимо зв'язок між кумулянтою та експоненційними генераторами.

Подамо генератор марковського процесу наступним чином

$$L\varphi(x) = \int_R e^{\lambda x} a(\lambda)\overline{\varphi}(\lambda)d\lambda,$$

де $a(\lambda)$ - кумулянта процесу,

$$\overline{\varphi}(\lambda) = \int_R e^{\lambda x}\varphi(x)dx.$$

Задамо зворотнє співвідношення

$$\int_R e^{-\lambda x} L\varphi(x)dx = a(\lambda)\overline{\varphi}(\lambda).$$

Подано останнє співвідношення у такому вигляді

$$\int_R e^{-\lambda x} L\varphi(x)dx = \int_R e^{-\lambda x} a(\lambda)\varphi(x)dx.$$

Застосувавши заміну

$$e^{-\lambda x}\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x),$$

отримаємо

$$\int_R e^{-\lambda x} L e^{\lambda x}\widetilde{\varphi}(x)dx = \int_R a(\lambda)\widetilde{\varphi}(x)dx.$$

Отже,

$$e^{-\lambda x} L e^{\lambda x} = a(\lambda).$$

Запишемо через експоненційний генератор

$$H\varphi_0(x) = a(\lambda),$$

де $\varphi_0(x) = \lambda x$.

3.4 Напівгрупа Нісіо

В останньому етапі розв'язання проблеми великих відхилень необхідно знайти варіаційне зображення функціонала дії. Така побудова функціоналу випливає з формули Брика та тісно пов'язана з мартингальною задачею керування. Отож, встановимо зв'язок між нелінійною напівгрупою та напівгрупою Нісіо [43].

Позначимо

$$E^P f(x) = \int_E f(x) dP(x),$$

де P – ймовірнісна міра на просторі E.

Якщо для ймовірнісної міри Q, абсолютно неперервної відносно іншої ймовірнісної міри P виконується співвідношення

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{e^{\varphi(u)}}{C},$$

де

$$C = E^P e^{\varphi(u)},$$

то

$$\ln \frac{dQ}{dP} = \varphi(u) - \ln E^P e^{\varphi(u)},$$

звідки отримуємо співвідношення

$$\ln E^P e^{\varphi(u)} = \varphi(u) - \ln \frac{dQ}{dP}.$$

Розглянемо нелінійну напівгрупу для марковського процесу $x(t)$

$$H_t \varphi(u) = \ln E^P (e^{\varphi(x(t))} \mid x(0) = u).$$

Запишемо твердження, що визначає нелінійну напівгрупу Нісіо.

Твердження 3.3. [41]. Нехай E – вимірний простір, $P(E)$ - сім'я імовірнісних мір на просторі E, $\varphi(x)$ - обмежена вимірна функція $\varphi : E \to R$. Тоді виконується формула

$$\ln E^P e^{\varphi(x(t))} = \sup_{Q \in P(E)} E^Q \left\{ \varphi(x(t)) - \ln \frac{dQ}{dP} x(\cdot) \right\}.$$

Інфімум досягається на ймовірнісній мірі Q, яка є абсолютно неперервною відносно міри P та задовольняє умову

$$\frac{dQ}{dP}(x) = e^{\varphi(x)} \frac{1}{\int\limits_E e^{\varphi(x)} dP}.$$

В даному твердження функція $\sup\limits_{Q \in P(E)} E^Q \left\{ \varphi(x(t)) - \ln \frac{dQ}{dP} x(\cdot) \right\}$ нелінійною напівгрупою Нісіо. Дана напівгрупа потрібна для розв'язування мартингальної задачі керування. Для побудови такого мартингала скористаємося лемою.

Лема 3.3. [41]. Нехай $x(t) \in E$ - розв'язок мартингальної задачі для генератора

$$L\varphi(x) = q(x) \int\limits_E [\varphi(y) - \varphi(x)] P(x, dy)$$

та

$$Hg(x) = e^{-g(x)} L e^{g(x)}.$$

Для будь-якого $T > 0$ означимо міру Q

$$\frac{dQ}{dP}(x(\cdot)) = \exp\left\{ g(x(t)) - g(x(0)) - \int\limits_0^T H_g(x(s)) ds \right\}.$$

Тоді по мірі Q марковський процес $\{x(t), 0 \le t \le T\}$ є розв'язком мартингальної задачі для L^g, де

$$L^g f(x) = e^{-g(x)} L(\varphi(x) e^{g(x)}) - e^{-g(x)} \varphi(x) L e^{g(x)} =$$

$$= q(x) \int\limits_E e^{g(y) - g(x)} (\varphi(y) - \varphi(x)) P(x, dy).$$

Ця лема випливає з перетворення Гірсанова після підстановки $h(x) = e^{g(x)}, \;\; g(x) = \ln h(x)$:

Лема 3.4. Нехай $x(t) \in E$ - розв'язок мартингальної задачі для генератора L з розподілом P, $h(x) \in B(E) \bigcap D(L), \;\; h(x) \ge \varepsilon > 0.$ Тоді

$$R(t) = \frac{h(x(t))}{h(x(0))} \exp\left\{ -\int\limits_0^t \frac{Lh}{h}(x(s)) ds \right\}$$

є $\Im_t$ - експоненційним мартингалом з математичним сподіванням рівним одиниці по розподілу *P*.

Означимо міру *Q* через $\frac{dQ}{dP} = R(T).$ Будемо вважати, що $D(L)$ - замкнений відносно множення на $h(x).$ Тоді по мірі *Q*, $x(t)$ - розв'язок мартингальної задачі для генератора $L^{\ln(h)}$ у просторі $C_E[0;T].$

Розглянемо наступну теорему.

Теорема 3.1. [41]. Нехай $x(t)$ в $C_E[0;T]$ - розв'язок мартингальної задачі для генератора *L*, а графік оператора належить простору $B(E)\times B(E).$

Позначимо мартингал

$$\mu_t^{\varphi} = \varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t L\varphi(x(s))ds,$$

для кожної $\varphi \in D(L).$

Тоді передбачу вальна квадратична коваріація μ_t^{φ} та μ_t^{h} для $\varphi, h \in D(L)$ має вигляд

$$\left\langle \mu^{\varphi}, \mu^{h} \right\rangle = \int_0^t \left\langle \varphi, h \right\rangle_L (X(s))ds,$$

де

$$\left\langle \varphi, h \right\rangle_L = L(\varphi h) - \varphi L h - h L \varphi.$$

З двох останніх лем випливає, що за мірою *Q* марковський процес $\{x(t), 0 \le t \le T\}$ є розв'язком мартингальної задачі L^g, тобто

$$\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t L^g \varphi(x(s))ds$$

є мартингалом керування $g(x)$ відносно міри *Q*.

Далі покажемо, що нелінійній напівгрупі Нісіо відповідає нелінійний оператор, пов'язаний з задачею керування.

За теоремою 3.1 [42] існує ймовірнісний розподіл $Q_{t,x}$ такий, що напівгрупа Нісіо має наступний вигляд

$$H_t\varphi(x) = E^{Q_{t,x}}\left\{\varphi(x(t)) - \ln\frac{dQ_{t,x}}{dP}(x(\cdot))\right\}.$$

У попередніх лемах розглядалася міра Q. Замінимо цю міру розподілом $Q_{t,x}$ і в результаті отримаємо

$$H_t\varphi(x) = E^{Q_{t,x}}\left\{\int_0^t L^g\varphi(x(s))ds - \ln\frac{dQ_{t,x}}{dP}(x(\cdot))\right\} + \varphi(x(0)).$$

Нехай існує границя для напівгрупи Нісіо, що відповідає дограничним процесам при $\varepsilon \to 0$

$$H_t^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon\ln Ee^{\frac{\varphi(x^\varepsilon(t))}{\varepsilon}}$$

і вони прямують до H_t.

Побудуємо мартингальну задачу керування

$$\int_0^t |L^g\varphi(x(s))|ds < \infty, \ \forall g,$$

$$\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int_0^t L^g\varphi(x(s))ds = 0,$$

якій відповідає напівгрупа Нісіо H_t

$$H_t\varphi(u) = \ln E^P e^{\varphi(x(t))}.$$

Розглянемо наступне твердження [41].

Твердження 3.4. Функціонал дії для дограничного процесу $x^\varepsilon(t)$ має вигляд

$$I(x) = I_0(x(0)) + \inf_{g:(x,g)\in\tau}\int_0^\infty A^g(x(s))ds,$$

де τ - множина розв'язків мартингальної задачі,

$$\int_0^t A^g(x(s))ds = g(x(t)) - g(x(0)) - \int_0^t Hg(x(s))ds.$$

Отож, остаточно розв'язок проблеми великих відхилень зводиться до пошуку функціонала дії

$$I(x) = I_0(x(0)) + \int_0^\infty L(x(s), x'(s))ds,$$

де $x(s)$ - марковський процес, а функція $L(x,u)$ визначається за допомогою експоненційного генератора

$$L(x,u) = \sup_{p \in R} \{pu - H(v, p)\},$$

де

$$p = \varphi'(u), \;\; H(v, \varphi'(u)) = H_{\Gamma}\varphi(u).$$

3.5. Проблема великих відхилень в схемі нелінійної апроксимації Пуассона

Розглянемо сім'ю процесів з незалежними приростами і траєкторіями в області визначення $D_R[0;\infty)$:

$$\eta_3^{\varepsilon}(t) = g_1(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right), \;\; t \ge 0.$$

В даному нормуванні $g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0.$

Дані процеси визначаються за допомогою генератора

$$\Gamma_3^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Функція $\varphi(u)$ двічі диференційована в R дорівнює прямує до нуля на нескінченості, з sup-нормою $\|\varphi\| = \sup_{u \in R^d}|\varphi(u)|$. Ядро інтенсивності $\Gamma^{\varepsilon}(dv)$ діє на функції з класу $C_0^3(R)$ та задовільняє умову

$$\Gamma^{\varepsilon}(\{0\}) = 0.$$

Розглянемо проблему великих відхилень в схемі апроксимації Пуассона, що задовольняє наступні умови:

(P1) Апроксимація середніх

$$b_{\varepsilon} = \int_R v\Gamma^{\varepsilon}(dv) = f_1(\varepsilon)(b + \Theta_b^{\varepsilon})$$

та

$$c_{\varepsilon} = \int_R v^2\Gamma^{\varepsilon}(dv) = f_1(\varepsilon)(c + \Theta_c^{\varepsilon})$$

де

$$|b| < \infty,\ 0 < c < \infty,\ \left|\Theta_b^\varepsilon\right| \to 0,\ \left|\Theta_c^\varepsilon\right| \to 0,\ f_1(\varepsilon) \to 0, \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

(P2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^\varepsilon = \int_R q(v)\Gamma^\varepsilon(dv) = f_1(\varepsilon)(\Gamma_q + \Theta_g^\varepsilon),$$

де Γ_q визначається наступним співвідношенням

$$\Gamma_q = \int_R q(v)\Gamma^0(dv)$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R),$ таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

(P3) В граничному генераторі виконується наступна умова

$$\int_R v^2\Gamma^0(dv) > 0.$$

(P4) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma^\varepsilon(dv) = 0.$$

(P5) Експоненційна обмеженість

$$\int_R e^{p|v|}\Gamma_q(dv) < \infty.$$

Розв’язок проблеми великих відхилень в схемі апроксимації Пуассона визначається нелінійним експоненційним генератором

$$\mathrm{H}_{\Gamma 1}^\varepsilon \varphi(u) = e^{-\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}} g_1(\varepsilon)\Gamma^\varepsilon e^{\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}}.$$

Твердження 3.1. Експоненційний генератор в схемі апроксимації Пуассона має наступне асимптотичне зображення

$$\mathrm{H}_{\Gamma 1}^\varepsilon \varphi(u) = \mathrm{H}_{\Gamma 1}\varphi(u) + \theta_\Gamma^\varepsilon \varphi,$$

за умови

$$(g_2(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon) f_1(\varepsilon) \to 1,$$

де

$$\varphi(u) \in C_0^3(R),\ |\theta_\Gamma^\varepsilon \varphi| \to 0,\ g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon), f_1(\varepsilon) \to 0, \text{при } \varepsilon \to 0,$$

$$\mathrm{H}_{\Gamma 1}\varphi(u) = b\varphi'(u) + \int_R (e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u))\Gamma^0(dv).$$

Доведення.

Розглянемо генератор процесу

$$\Gamma_3^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R[\varphi(u+g_1(\varepsilon)v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Представимо експонеційний генератор в наступній формі

$$\mathrm{H}_{\Gamma 1}^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\int_R(e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)}-1)\Gamma^{\varepsilon}(dv),$$

де

$$\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)=(g_1(\varepsilon))^{-1}(\varphi(u+g_1(\varepsilon)v)-\varphi(u)).$$

Подамо генератор у наступному вигляді

$$\mathrm{H}_{\Gamma 1}^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\int_R(e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)}-1-\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2)\Gamma^{\varepsilon}(dv)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\int_R(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)+\frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2)\Gamma^{\varepsilon}(dv),$$

де функція $e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)}-1-\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2$ належить класу $C^3(R),$ оскільки

$$\frac{e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)}-1-\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2}{v^2}\to 0,\ \text{якщо}\ v\to 0.$$

Окрім цього, дана функція неперервна та обмежена для всіх $\varphi(u)\in C_0^2(R).$

З умов (P1), (P2) отримуємо

$$\mathrm{H}_{\Gamma 1}^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)\int_R(e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)}-1-\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2)\Gamma^{0}(dv)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\int_R(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)-v\varphi(u)-g_1(\varepsilon)\frac{v^2}{2}\varphi''(u))\Gamma^{\varepsilon}(dv)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)b\varphi'(u)+\frac{1}{2}(g_2(\varepsilon))^{-1}(g_1(\varepsilon))^2\,f_1(\varepsilon)c\varphi''(u)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\int_R(\frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2)\Gamma^{\varepsilon}(dv)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)\frac{1}{2}c(\varphi'(u))^2.$$

Застосуємо формулу Тейлора до функції $\varphi(u)$ та умову (P2):

$$\mathrm{H}_{\Gamma 1}^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)\int_R(e^{v\varphi'(u)}-1-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2)\Gamma^{0}(dv)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)\int_R(e^{v\varphi'(u)}g_1(\varepsilon)\frac{v^2}{2}\varphi''(\tilde{u})-g_1(\varepsilon)\frac{v^2}{2}\varphi''(\tilde{u})-$$

$$-g_1(\varepsilon)\frac{v^4}{8}(\varphi''(\tilde{u}))^2)\Gamma^0(dv)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)\int_R g_1(\varepsilon)\frac{v^3}{3!}\varphi'''(\tilde{u})\Gamma^0(dv)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)b\varphi'(u)+\frac{1}{2}(g_2(\varepsilon))^{-1}(g_1(\varepsilon))^2\,f_1(\varepsilon)c\varphi''(\tilde{u})+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)\int_R g_1(\varepsilon)\frac{v^4}{4}(\varphi''(\tilde{u}))^2\Gamma^0(dv)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)c\frac{1}{2}(\varphi'(u))^2.$$

З умови (Р3) та $(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)\to 1$ отримуємо

$$\mathrm{H}^{\varepsilon}_{\Gamma 1}\varphi(u)=\mathrm{H}_{\Gamma 1}\varphi(u)+\theta^{\varepsilon}_{\Gamma}\varphi,$$

де $|\theta^{\varepsilon}_{\Gamma}\varphi|\to 0,\ g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon),\ f_1(\varepsilon)\to 0,$ при $\varepsilon\to 0.$

Теорема 3.2. Розв’язок проблеми великих відхилень для процесу

$$\eta^{\varepsilon}_3(t)=g_1(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right),$$

$$\Gamma^{\varepsilon}_3\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R[\varphi(u+g_1(\varepsilon)v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv)$$

існує та визначається граничним генератором $\mathrm{H}_{\Gamma 1}$

$$\mathrm{H}_{\Gamma 1}\varphi(u)=b\varphi'(u)+\int_R(e^{v\varphi'(u)}-1-v\varphi'(u))\Gamma^0(dv)$$

тоді і тільки тоді, якщо виконується умова

$$(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)\to 1, \varepsilon\to 0.$$

Доведення.

Необхідна умова існування граничного генератора випливає з попереднього твердження.

Доведемо достатню умову.

Припустимо, що $(g_2(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)$ не прямує до 1 при $\varepsilon\to 0.$

Розгянемо граничний генератор $\mathrm{H}^{\varepsilon}_{\Gamma 1}\varphi(u)=\mathrm{H}_{\Gamma 1}\varphi(u)+\theta^{\varepsilon}_{\Gamma}\varphi,$

$$\mathrm{H}_{\Gamma 1}\varphi(u)=b\varphi'(u)+(g_1(\varepsilon))^{-1}g_2(\varepsilon)\int_R(e^{v\varphi'(u)}-1-v\varphi'(u))\Gamma^0(dv).$$

$$\mathrm{H}^{\varepsilon}_{\Gamma 1}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} g_2(\varepsilon)\int_R (e^{\Delta_\varepsilon \varphi(u)} - 1)\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Тоді генератор матиме наступний вигляд

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} g_2(\varepsilon)\int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Оскільки процес

$$\eta_3^{\varepsilon}(t) = g_1(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right),$$

визначається генератором

$$\Gamma_3^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv),$$

то дане припущення не вірне.

Теорему доведено.

Зауваження 3.1. Умова $(g_2(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon) f_1(\varepsilon) \to 1, \varepsilon \to 0$ виконується не лише для стандартних функцій $g_2(\varepsilon) = \varepsilon^2,\ g_1(\varepsilon) = \varepsilon,\ f_1(\varepsilon) = \varepsilon,$ але й для складніших функцій, таких як $g_2(\varepsilon) = \varepsilon^2,\ g_1(\varepsilon) = \sin\varepsilon,\ f_1(\varepsilon) = tg\varepsilon.$

Приклад 3.1. Розглянемо сім'ю процесів з незалежними приростами в схемі нелінійної апроксимації Пуассона:

$$\eta^{\varepsilon}(t) = tg(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{tg^2(\varepsilon)}\right),\ t \ge 0.$$

Випадкові величини мають наступний розподіл

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = \alpha\} = \sin(\varepsilon)p,$$

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = \sin(\varepsilon)\beta\} = 1 - \sin(\varepsilon)p.$$

Перевіримо умови апроксимації Пуассона в проблемі великих відхилень

Знайдемо перший момент

$$E\alpha^{\varepsilon} = \alpha\sin(\varepsilon)p + \sin(\varepsilon)\beta - \sin^2(\varepsilon)\beta p =$$

$$= \sin(\varepsilon)(\alpha p + \beta) - \sin^2(\varepsilon)\beta p =$$

$$= \sin(\varepsilon)(\alpha p + \beta) - O(\sin^2(\varepsilon)).$$

Знайдемо другий момент

$$E(\alpha^{\varepsilon})^2 = \alpha^2\sin(\varepsilon)p + (\sin(\varepsilon)\beta)^2 - \sin^3(\varepsilon)\beta^2 p =$$

$$= \sin(\varepsilon)\alpha^2 p + O(\sin^2(\varepsilon)).$$

Таким чином

$$\begin{cases} f_1(\varepsilon) = \sin(\varepsilon), \\ b = \alpha p + \beta, \\ c = \alpha^2 p. \end{cases}$$

Перевіримо граничну умову теореми 3.2.

$$(g_2(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon) f_1(\varepsilon) \to 1, \varepsilon \to 0$$

В даному випадку

$$\begin{cases} f_1(\varepsilon) = \sin(\varepsilon), \\ g_1(\varepsilon) = tg(\varepsilon), \\ g_2(\varepsilon) = tg^2(\varepsilon). \end{cases}$$

$$(tg^2(\varepsilon))^{-1} \cdot tg(\varepsilon) \cdot \sin(\varepsilon) = \left(\frac{\sin^2(\varepsilon)}{\cos^2(\varepsilon)} \right)^{-1} \cdot \frac{\sin(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon)} \cdot \sin(\varepsilon) =$$

$$= \cos(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1.$$

Отже, даний марковський процес задовольняє умови проблеми великих відхилень в схемі апроксимації Пуассона.

3.6. Проблема великих відхилень в схемі нелінійної апроксимації Леві

Розглянемо сім'ю процесів з незалежними приростами і траєкторіями в області визначення $D_R[0;\infty)$:

$$\eta_4^\varepsilon(t) = g_1(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{g_3(\varepsilon)} \right), \ t \ge 0.$$

В даному нормуванні $g_1(\varepsilon), g_3(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Дані процеси визначаються за допомогою генератора

$$\Gamma_4^\varepsilon \varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon(dv).$$

Функція $\varphi(u)$ двічі диференційована в R дорівнює прямує до нуля на нескінчености, з sup-нормою $\|\varphi\| = \sup|\varphi(u)|,\ u \in R^d$. Ядро інтенсивності $\Gamma^{\varepsilon}(dv)$ діє на функції з класу $C_0^3(R)$ та задовільняє умову

$$\Gamma^{\varepsilon}(\{0\}) = 0.$$

Розглянемо проблему великих відхилень в схемі апроксимації Леві, що задовольняє наступні умови:

(L1) Апроксимація середніх

$$b_{\varepsilon} = \int_R v\Gamma^{\varepsilon}(dv) = f_1(\varepsilon)b_1 + f_2(\varepsilon)(b + \Theta_b^{\varepsilon})$$

та

$$c_{\varepsilon} = \int_R v^2\Gamma^{\varepsilon}(dv) = f_2(\varepsilon)(c + \Theta_c^{\varepsilon})$$

де

$$|b| < \infty,\ 0 < c < \infty,\ \left|\Theta_b^{\varepsilon}\right| \to 0,\ \left|\Theta_c^{\varepsilon}\right| \to 0,\ f_1(\varepsilon), f_2(\varepsilon) \to 0\text{, при } \varepsilon \to 0.$$

В даному нормуванні $f_2(\varepsilon) = o(f_1(\varepsilon))$.

(L2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^{\varepsilon} = \int_R q(v)\Gamma^{\varepsilon}(dv) = f_2(\varepsilon)(\Gamma_q + \Theta_g^{\varepsilon}),$$

де Γ_q визначається наступним співвідношенням

$$\Gamma_q = \int_R q(v)\Gamma^0(dv)$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R)$, таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0$, коли $v \to 0$.

(L3) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma^{\varepsilon}(dv) = 0.$$

(L4) Експоненційна обмеженість

$$\int_R e^{p|v|}\Gamma_q(dv) < \infty.$$

Твердження 3.2. Експоненційний генератор

$$\mathrm{H}_{\Gamma 2}^{\varepsilon}\varphi(u) = e^{-\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}} g_1(\varepsilon)\Gamma^{\varepsilon} e^{\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}}$$

в схемі апроксимації Леві має наступне асимптотичне зображення

$$\mathrm{H}_{\Gamma 2}^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon) f_1(\varepsilon) b_1\varphi'(u) + \mathrm{H}_{\Gamma 2}\varphi(u) + \theta_{\Gamma}^{\varepsilon}\varphi,$$

за умови

$$(g_3(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon) f_2(\varepsilon) \to 1,$$

де

$$\varphi(u) \in C_0^3(R),\ |\theta_{\Gamma}^{\varepsilon}\varphi| \to 0,\ g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon), g_3(\varepsilon), f_1(\varepsilon), f_2(\varepsilon) \to 0, \text{при } \varepsilon \to 0,$$

$$\mathrm{H}_{\Gamma 2}\varphi(u) = (b - b_0)\varphi'(u) + \frac{1}{2}(c - c_0)(\varphi'(u))^2 + \int_R (e^{v\varphi'(u)} - 1)\Gamma^0(dv),$$

$$b_0 = \int_R v\Gamma^0(dv),\ \ c_0 = \int_R v^2\Gamma^0(dv).$$

Доведення.

Розглянемо генератор марковського процесу

$$\Gamma_4^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Представимо експонеційний генератор в наступній формі

$$\mathrm{H}_{\Gamma 2}^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon)\int_R (e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)} - 1)\Gamma^{\varepsilon}(dv),$$

де

$$\Delta_{\varepsilon}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}(\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)).$$

Подамо генератор у наступному вигляді

$$\mathrm{H}_{\Gamma 2}^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon)\int_R (e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\varepsilon}\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2)\Gamma^{\varepsilon}(dv) +$$

$$+ (g_3(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon)\int_R (\Delta_{\varepsilon}\varphi(u) + \frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2)\Gamma^{\varepsilon}(dv),$$

де функція $e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\varepsilon}\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2$ належить класу $C^3(R),$ оскільки

$$\frac{e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\varepsilon}\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2}{v^2} \to 0, \text{якщо } v \to 0.$$

Окрім цього, дана функція неперервна та обмежена для всіх $\varphi(u) \in C_0^2(R).$

З умов (L1), (L2) отримуємо

$$\mathrm{H}_{\Gamma 2}^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon)\int_R(e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1-\Delta_\varepsilon\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2)\Gamma^0(dv)+$$

$$+(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\int_R(\Delta_\varepsilon\varphi(u)-v\varphi'(u)-g_1(\varepsilon)\frac{v^2}{2}\varphi''(u))\Gamma^{\varepsilon}(dv)+$$

$$+(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_1(\varepsilon)b_1\varphi'(u)+(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon)b\varphi'(u)+$$

$$+\frac{1}{2}(g_3(\varepsilon))^{-1}(g_1(\varepsilon))^2f_2(\varepsilon)c\varphi''(u)+$$

$$+(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)\int_R(\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2)\Gamma^{\varepsilon}(dv)+$$

$$+(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon)\frac{1}{2}c(\varphi'(u))^2.$$

Застосуємо формулу Тейлора до функції $\varphi(u)$ та умову (L2):

$$\mathrm{H}_{\Gamma 2}^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon)\int_R(e^{v\varphi'(u)}-1-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2)\Gamma^0(dv)+$$

$$+(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon)\int_R(e^{v\varphi'(u)}g_1(\varepsilon)\frac{v^2}{2}\varphi''(\tilde{u})-g_1(\varepsilon)\frac{v^2}{2}\varphi''(\tilde{u})-$$

$$-g_1(\varepsilon)\frac{v^4}{8}(\varphi''(\tilde{u}))^2)\Gamma^0(dv)+$$

$$+(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon)\int_R g_1(\varepsilon)\frac{v^3}{3!}\varphi'''(\tilde{u})\Gamma^0(dv)+(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_1(\varepsilon)b_1\varphi'(u)+$$

$$+(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon)b\varphi'(u)+\frac{1}{2}(g_3(\varepsilon))^{-1}(g_1(\varepsilon))^2f_2(\varepsilon)c\varphi''(\tilde{u})+$$

$$+(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon)\int_R g_1(\varepsilon)\frac{v^4}{4}(\varphi''(\tilde{u}))^2\Gamma^0(dv)+$$

$$+(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon)c\frac{1}{2}(\varphi'(u))^2.$$

З умови (L3) та $(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon)\to 1$ отримуємо

$$\mathrm{H}_{\Gamma 2}^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_1(\varepsilon)b_1\varphi'(u)+\mathrm{H}_{\Gamma 2}\varphi(u)+\theta_{\Gamma}^{\varepsilon}\varphi,$$

де $|\theta_{\Gamma}^{\varepsilon}\varphi|\to 0,\ g_1(\varepsilon),g_2(\varepsilon),g_3(\varepsilon),\ f_1(\varepsilon),\ f_2(\varepsilon)\to 0,$ при $\varepsilon\to 0.$

Теорема 3.3. Розв’язок проблеми великих відхилень для процесу

$$\eta_4^{\varepsilon}(t)=g_1(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{g_3(\varepsilon)}\right),$$

$$\Gamma_4^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+g_1(\varepsilon)v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv)$$

існує та визначається граничним генератором $\mathrm{H}_{\Gamma 2}$

$$\mathrm{H}_{\Gamma 2}\varphi(u) = (b-b_0)\varphi'(u) + \frac{1}{2}(c-c_0)(\varphi'(u))^2 + \int_R (e^{v\varphi'(u)}-1)\Gamma^0(dv)$$

тоді і тільки тоді, якщо виконується умова

$$(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon) \to 1, \varepsilon \to 0.$$

Доведення.

Необхідна умова існування граничного генератора випливає з попереднього твердження.

Доведемо достатню умову.

Припустимо, що $(g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_2(\varepsilon)$ не прямує до 1 при $\varepsilon \to 0$.

Розгянемо граничний генератор $\mathrm{H}_{\Gamma 2}^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1}g_1(\varepsilon)f_1(\varepsilon)b_1\varphi'(u) + \mathrm{H}_{\Gamma 2}\varphi(u) + \theta_{\Gamma}^{\varepsilon}\varphi,$

$$\mathrm{H}_{\Gamma 2}^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}g_3(\varepsilon)\int_R (e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1)\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Тоді генератор матиме наступний вигляд

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}g_3(\varepsilon)\int_R [\varphi(u+g_1(\varepsilon)v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Оскільки процес

$$\eta_4^{\varepsilon}(t) = g_1(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{g_3(\varepsilon)}\right),$$

визначається генератором

$$\Gamma_4^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+g_1(\varepsilon)v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv)$$

то дане припущення не вірне.

Теорему доведено.

Приклад 3.2.

Розглянемо сім'ю процесів з незалежними приростами в схемі нелінійної апроксимації Леві:

$$\eta^{\varepsilon}(t) = \sin(2\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{\sin^2(\varepsilon)}\right), t \ge 0.$$

Випадкові величини мають наступний розподіл

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = tg(\varepsilon)\alpha_1\} = p_0 - \frac{tg(\varepsilon)}{2} p_1,$$

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = \frac{tg(\varepsilon)}{2}\alpha\} = q_0,\ p_0 + q_0 = 1,$$

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = d\} = \frac{tg(\varepsilon)}{2} p_1.$$

Перевіримо умови апроксимації Леві в проблемі великих відхилень

Знайдемо перший момент

$$b_{\varepsilon} = E\alpha^{\varepsilon} = p_0 tg(\varepsilon)\alpha_1 - \frac{tg^2(\varepsilon)}{2}\alpha_1 p_1 + q_0\frac{tg(\varepsilon)}{2}\alpha + \frac{tg(\varepsilon)}{2} p_1 d =$$

$$= tg(\varepsilon)(p_0\alpha_1 + \frac{p_1 d + \alpha q_0}{2}) - tg^2(\varepsilon)\frac{p_1\alpha_1}{2} + o(tg^2(\varepsilon)).$$

Знайдемо другий момент

$$c_{\varepsilon} = E(\alpha^{\varepsilon})^2 = tg^2(\varepsilon)\alpha_1(p_0 - \frac{tg(\varepsilon)}{2} p_1) + \frac{tg^2(\varepsilon)}{4}\alpha^2 q_0 + d^2\frac{tg(\varepsilon)}{2} p_1 =$$

$$= tg^2(\varepsilon)(\alpha_1 p_0 - \frac{\alpha^2 q_0}{4}) + 0(tg^2(\varepsilon)).$$

Таким чином

$$f_1(\varepsilon) = tg(\varepsilon),$$

$$f_2(\varepsilon) = \frac{tg(\varepsilon)}{2},$$

$$b_1 = p_0\alpha_1 + \frac{p_1 d + \alpha q_0}{2},$$

$$b = \frac{p_1\alpha_1}{2},$$

$$c = \alpha_1 p_0 - \frac{\alpha^2 q_0}{4}.$$

Перевіримо граничну умову

$$(g_3(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon) f_2(\varepsilon) \to 1, \varepsilon \to 0$$

В даному випадку

$$\begin{cases} f_1(\varepsilon) = tg(\varepsilon), \\ f_2(\varepsilon) = \dfrac{tg(\varepsilon)}{2}, \\ g_1(\varepsilon) = \sin(2\varepsilon), \\ g_2(\varepsilon) = \sin^2(\varepsilon). \end{cases}$$

$$(\sin^2(\varepsilon))^{-1} \cdot \sin(2\varepsilon) \cdot \frac{tg(\varepsilon)}{2} = \frac{1}{\sin^2(\varepsilon)} \cdot 2\sin(\varepsilon)\cos(\varepsilon) \cdot \frac{tg(\varepsilon)}{2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1.$$

Отже, даний марковський процес задовольняє умови проблеми великих відхилень в схемі апроксимації Леві.

Висновки до розділу 3.

У третьому розділі розглядається проблема великих відхилень. В схемі нелінійної апроксимації Пуассона визначено розв’язок проблеми великих відхилень.

Розв’язок проблеми великих відхилень для процесу

$$\eta_3^\varepsilon(t) = g_1(\varepsilon)\eta\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right),$$

$$\Gamma_3^\varepsilon \varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon(dv)$$

за умов (P1-P5) та граничної умови

$$(g_2(\varepsilon))^{-1} g_1(\varepsilon) f_1(\varepsilon) \to 1, \varepsilon \to 0,$$

визначається граничним генератором $\mathrm{H}_{\Gamma 1}$

$$\mathrm{H}_{\Gamma 1}\varphi(u) = b\varphi'(u) + \int_R (e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u))\Gamma^0(dv).$$

В даному розділі знайдено необхідні та достатні умови для існування розв’язку проблеми великих відхилень в схемах нелінійних апроксимацій.

Також, знайдено розв’язок проблеми великих відхилень в схемі нелінійної апроксимації Леві та наведено приклади сімейства марковських процесів, що задовільняють умови даних нелінійних апроксимацій.

РОЗДІЛ IV

НЕЛІНІЙНЕ НОРМУВАННЯ МАКРОВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ

В даному розділі розглядаються марковські випадкові еволюції. Генератори даних еволюцій нормуються нелінійними функціями. В схемі апроксимації Леві знайдено асимптотичне зображення генераторів марковських випадкових еволюцій.

Крім цього, марковські еволюції розглядаються в проблемі великих відхилень. Знайдено граничний генератор, що визначає розв'язок проблеми великих відхилень для генератора марковських еволюцій в схемі апроксимації Леві. Також, розглядаються імпульсні рекурентні процеси в схемі нелінійної апроксимації Леві.

Отримані результати даного розділу опубліковано в працях [27], [58], [60], [62].

4.1 Проблема великих відхилень для випадкових еволюцій в схемі нелінійної апроксимації Пуассона

Розглянемо випадкову еволюцію

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x(s)).$$

В схемі Пуассонової апроксимації присутні три нормуючі функції: функція $g_1(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0,$ нормує час, $g_2(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0$ - величину стрибків, а функція $f_1(\varepsilon), \varepsilon \to 0,$ нормує інтенсивність стрибків.

Сімейство випадкових еволюцій має вигляд

$$\xi^{\varepsilon}(t)=\xi^{\varepsilon}(0)+\int_0^t \eta^{\varepsilon}\left(ds;x\left(\frac{s}{(g_1(\varepsilon))^2}\right),t\geq 0,\right.$$

$$\eta^{\varepsilon}(t)=g_1(\varepsilon)\eta^{f(\varepsilon)}\left(\frac{t}{(g_1(\varepsilon))^2}\right),t\geq 0,$$

де $\eta^{f(\varepsilon)}(t)$ - процес з незалежними приростами, $x(s)$ - марковський процес.

Процеси $\eta^{\varepsilon}(t)$ визначається генератором

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R[\varphi(u+g_1(\varepsilon)v)-\varphi(u)]\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x),x\in E,$$

де $\varphi(u)$- двічі диференційована функція в R, що прямує до 0 на нескінченності та з sup-нормою, $\varphi(u)\in C_0^2(R)$.

Ядро інтенсивності належить до класу $C^3(R)$. Дане ядро задовольняє умову

$$\Gamma^{\varepsilon}(0)=0.$$

Нормуюча функція $g_2(\varepsilon)=o(g_1(\varepsilon)),\ g_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0.$

В даному нормуванні $(g_1(\varepsilon))^{-1}\cdot f_1(\varepsilon)\to 1,$ при $g_1(\varepsilon)\to 0,\ f_1(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0.$

Розглянемо проблему великих відхилень в схемі пуассонової апроксимації з наступними умовами

(P1) Апроксимація середніх

$$b_{\varepsilon}(x)=\int_R v\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x)=\ f_1(\varepsilon)(b(x)+\Theta_b^{\varepsilon}(x))$$

та

$$c_{\varepsilon}(x)=\int_R v^2\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x)=\ f_1(\varepsilon)(c(x)+\Theta_c^{\varepsilon}(x)),$$

де

$$\sup_{x\in E}|b(x)|\leq b<\infty,\ \sup_{x\in E}|c(x)|\leq c<\infty,$$

$$\left|\Theta_b^{\varepsilon}(x)\right|\to 0,\ \ \left|\Theta_c^{\varepsilon}(x)\right|\to 0,\ \ \ f_1(\varepsilon)\to 0,\varepsilon\to 0.$$

(P2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^{f(\varepsilon)}(x)=\int_R q(v)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x)=\ f_1(\varepsilon)(\Gamma_q(x)+\Theta_q^{\varepsilon}(x))$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R),$ таких, що $\frac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

При цьому, $\Gamma_q^{f(\varepsilon)}(x)$ є обмеженою

$$|\Gamma_q(x)| \leq \Gamma_q, \Gamma_q = \text{constant}.$$

$\Gamma_q(x)$ визначається таким співвідношенням

$$\Gamma_q(x) = \int_R q(v)\Gamma^0(dv; x).$$

(P3) В граничному генераторі виконується наступна умова

$$c(x) = \int_R v^2 \Gamma^0(dv; x)$$

$$|c(x)| < c = const$$

(P4) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{x\in E} \int_{|v|>c} v^2 \Gamma^0(dv; x) = 0,$$

що визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

(P5) Експоненційна обмеженість

$$\int_R e^{p|v|} \Gamma_q(dv; x) < \infty.$$

Теорема 4.1. Нехай виконуються умови **P1-P5** та при $\varepsilon \to 0$

$$(g_1(\varepsilon))^{-1} \cdot f_1(\varepsilon) \to 1.$$

Тоді має місце слабка збіжність

$$\xi^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \xi(t)$$

Процес $\xi^{\varepsilon}(t)$ визначається генератором

$$L^{\varepsilon}\varphi(u, x) = (g_2(\varepsilon))^{-1} Q\varphi(\cdot, x) + \Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u, \cdot),$$

де

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)] \Gamma^{\varepsilon}(dv; x), x \in E,$$

Граничний процес $\xi(t)$ визначається експоненційним генератором

$$\mathrm{H}^0\varphi(u) = \hat{b}\varphi'(u) + \int_R [e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)] \widehat{\Gamma}^0(dv)$$

$$\hat{b} = \Pi b(x) = \int_E \pi(dx) b(x), \ \widehat{\Gamma}^0(v) = \Pi\Gamma^0(v; x) = \int_E \pi(dx)\Gamma^0(v; x).$$

Для доведення даної теореми знадобиться наступна лема.

Лема 4.1. Експоненційний генератор

$$\mathrm{H}_{\Gamma}^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi^{\varepsilon}(u) = e^{-\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}} g_1(\varepsilon)\Gamma_{\varepsilon}^{\delta}(x) e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}$$

в схемі апроксимації Пуассона має наступне асимптотичне зображення

$$\mathrm{H}_{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = \mathrm{H}_{\Gamma}(x)\varphi(u) + \theta_{\Gamma}^{\varepsilon}\varphi,$$

де

$$\varphi(u) \in C_0^3(R),\ |\theta_{\Gamma}^{\varepsilon}\varphi| \to 0, \text{при}\ g_1(\varepsilon) \to 0,\ f_1(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

$$\mathrm{H}_{\Gamma}(x)\varphi(u) = b(x)\varphi'(u) + \int_R [e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)]\Gamma^0(dv;x).$$

Доведення. Генератор марковського процесу з незалежними приростами має наступний вигляд

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x).$$

Таким чином, для експоненційного генератора має місце зображення

$$\mathrm{H}_{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R (e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)} - 1)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x),$$

де

$$\Delta_{\varepsilon}\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}(\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)).$$

Експоненційний генератор можна подати наступним чином

$$\mathrm{H}_{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R (e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\varepsilon}\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x) +$$

$$+ (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R (\Delta_{\varepsilon}\varphi(u) + \frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2)\Gamma^{\delta}(dv;x).$$

Функція $e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\varepsilon}\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2$ належить до класу $C^3(R)$. Крім цього, дана функція неперервна та обмежена для всіх $\varphi(u) \in C_0^2(R)$.

З умов (Р1), (Р2) отримуємо

$$\mathrm{H}_{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} f_1(\varepsilon)\int_R (e^{\Delta_{\varepsilon}\varphi(u)} - 1 - \Delta_{\varepsilon}\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_{\varepsilon}\varphi(u))^2)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x) +$$

$$+ (g_1(\varepsilon))^{-1}\int_R (\Delta_{\varepsilon}\varphi(u) - v\varphi(u) - g_1(\varepsilon)\frac{v^2}{2}\varphi''(u))\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x) + (g_1(\varepsilon))^{-1} f_1(\varepsilon) b\varphi'(u) +$$

$$+\frac{1}{2}c\varphi''(u)+(g_1(\varepsilon))^{-1}\int_R(\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv)+(g_1(\varepsilon))^{-1}f_1(\varepsilon)\frac{1}{2}c(\varphi'(u))^2.$$

Застосувавши формулу Тейлора для функції $\varphi(u)$ та умову (Р2) отримуємо наступне зображення експоненційного генератора

$$\mathrm{H}_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u)=(g_1(\varepsilon))^{-1}f_1(\varepsilon)\int_R(e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2)\Gamma^0(dv;x)+$$

$$+(g_1(\varepsilon))^{-1}f_1(\varepsilon)\int_R(e^{v\varphi'(u)}g_1(\varepsilon)\frac{v^2}{2}(\varphi(\tilde{u}))''-g_2(\varepsilon)\frac{v^2}{2}(\varphi(\tilde{u}))''-g_1(\varepsilon)\frac{v^4}{8}(\varphi(\tilde{u}))'')^2)\Gamma^0(dv;x)+$$

$$+(g_1(\varepsilon))^{-1}f_1(\varepsilon)\int_R g_2(\varepsilon)\frac{v^3}{3!}(\varphi(\tilde{u}))''\Gamma^0(dv;x)+(g_1(\varepsilon))^{-1}f_1(\varepsilon)\varphi'(u)+\frac{1}{2}f_1(\varepsilon)c(\varphi(\tilde{u}))''+$$

$$+(g_1(\varepsilon))^{-1}f_1(\varepsilon)\int_R g_2(\varepsilon)\frac{v^4}{4}((\varphi(\tilde{u}))'')^2\Gamma^0(dv;x)+(g_1(\varepsilon))^{-1}f_1(\varepsilon)c\frac{1}{2}(\varphi'(u))^2$$

Далі, застосувавши умову (Р3) та граничну умову $(g_1(\varepsilon))^{-1}\cdot f_1(\delta)\to 1$, остаточно отримуємо

$$\mathrm{H}_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u)=\mathrm{H}_\Gamma(x)\varphi(u)+\theta_\Gamma^\varepsilon\varphi.$$

Лему доведено.

Доведення теореми.

Граничний перехід в експоненційному генераторі для випадкових еволюцій, можна здійснити за допомогою функції

$$\varphi^\varepsilon(u,x)=\varphi(u)+g_1(\varepsilon)\ln(1+f_1(\varepsilon)\varphi_1(u,x)).$$

Таким чином, отримуємо

$$\mathrm{H}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u)=e^{-\frac{\varphi^\varepsilon}{g_1(\varepsilon)}}g_1(\varepsilon)L^\varepsilon(x)e^{\frac{\varphi^\varepsilon}{g_1(\varepsilon)}}=e^{-\frac{\varphi^\varepsilon}{g_1(\varepsilon)}}(1+f_1(\varepsilon)\varphi_1)g_1(\varepsilon)L^\varepsilon(x)e^{\frac{\varphi^\varepsilon}{g_1(\varepsilon)}}(1+f_1(\varepsilon)\varphi_1).$$

Наступним кроком буде знаходження асимптотичної поведінки експоненційного генератора. Для цього розглянемо наступну лему.

Лема 4.2. Асимптотичне зображення генератора

$$\mathrm{H}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u)=e^{-\frac{\varphi^\varepsilon}{g_1(\varepsilon)}}(1+f_1(\varepsilon)\varphi_1)g_1(\varepsilon)L^\varepsilon(x)e^{\frac{\varphi^\varepsilon}{g_1(\varepsilon)}}(1+f_1(\varepsilon)\varphi_1)$$

має наступний вигляд

$$\mathrm{H}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u)=Q\varphi_1+\mathrm{H}_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u)+\theta^\varepsilon\varphi,$$

де

$$\sup|\theta^{\varepsilon}\varphi|\to 0, \text{при } g_1(\varepsilon)\to 0, f_1(\varepsilon)\to 0, \varepsilon\to 0.$$

Доведення. Розглянемо генератор

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x)=(g_2(\varepsilon))^{-1}Q\varphi(\cdot,x)+\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u,\cdot).$$

Тоді

$$\mathrm{H}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u)=e^{-\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}(1-f_1(\varepsilon)\varphi_1+\frac{f_1^2(\varepsilon)\varphi_1^2}{1+f_1(\varepsilon)\varphi_1})(g_1^{-1}(\varepsilon)Q+g_1(\varepsilon)\Gamma^{\varepsilon}(x)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}(1+f_1(\varepsilon)\varphi_1)=$$

$$=e^{-\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}(1-f_1(\varepsilon)\varphi_1+\frac{f_1^2(\varepsilon)\varphi_1^2}{1+f_1(\varepsilon)\varphi_1})(g_1^{-1}(\varepsilon)f_1(\varepsilon)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}Q+g_1(\varepsilon)\Gamma^{\varepsilon}(x)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}+$$

$$+g_1(\varepsilon)\Gamma^{\varepsilon}(x)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}f_1(\varepsilon)\varphi_1)$$

Таким чином

$$\mathrm{H}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u)=Q\varphi_1+\mathrm{H}^{\varepsilon}(x)\varphi(u)+\theta^{\varepsilon}\varphi,$$

де

$$\theta^{\varepsilon}\varphi=f_1(\varepsilon)[\frac{g_1(\varepsilon)}{1+f_1(\varepsilon)\varphi_1}e^{-\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}\Gamma^{\varepsilon}(x)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}\varphi_1-\frac{g_1^{-1}(\varepsilon)f_1(\varepsilon)\varphi_1}{1+f_1(\varepsilon)\varphi_1}Q\varphi_1-$$

$$-\frac{f_1(\varepsilon)}{1+f_1(\varepsilon)\varphi_1}e^{-\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}\Gamma^{\varepsilon}(x)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}].$$

Лему доведено.

Знайдемо розв'язок задачі сингулярного збурення для Q:

$$Q\varphi_1+\mathrm{H}_{\Gamma}(x)\varphi(u)=\mathrm{H}^0\varphi(u),$$

де

$$\mathrm{H}^0\varphi(u)=\Pi Q\Pi\varphi_1+\Pi\mathrm{H}_{\Gamma}(x)\Pi\varphi(u).$$

Звідси отримуємо

$$\mathrm{H}^0\varphi(u)=\hat{b}\varphi'(u)+\int_R[e^{v\varphi'(u)}-1-v\varphi'(u)]\widehat{\Gamma}^0(dv).$$

Теорему доведено.

З отриманих результатів випливає наступна теорема.

Теорема 4.2. Нехай процес $\xi^{\varepsilon}(t)$ визначається генератором

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x)=(g_2(\varepsilon))^{-1}Q\varphi(\cdot,x)+\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u,\cdot),$$

та виконуються умови **P1-P5** та при $\varepsilon\to 0$

Має місце слабка збіжність

$$\xi^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \xi(t)$$

тоді і тільки тоді, якщо

$$(g_1(\varepsilon))^{-1} \cdot f_1(\varepsilon) \to 1.$$

Граничний процес $\xi(t)$ визначається експоненційним генератором

$$\mathrm{H}^0\varphi(u) = \hat{b}\varphi'(u) + \int_R [e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)]\widehat{\Gamma}^0(dv)$$

$$\hat{b} = \Pi b(x) = \int_E \pi(dx)b(x),\ \widehat{\Gamma}^0(v) = \Pi\Gamma^0(v;x) = \int_E \pi(dx)\Gamma^0(v;x).$$

4.2 Проблема великих відхилень для випадкових еволюцій в схемі нелінійної апроксимації Леві

Розглянемо інше нормування для випадкових марковських еволюцій в проблемі великих відхилень

$$\xi^{\varepsilon}(t) = \xi^{\varepsilon}(0) + \int_0^t \eta^{\varepsilon}\left(ds; x\left(\frac{s}{(g_1(\varepsilon))^3}\right)\right), t \ge 0,$$

$$\eta^{\varepsilon}(t) = g_1(\varepsilon)\eta^{f(\varepsilon)}\left(\frac{t}{(g_1(\varepsilon))^3}\right), t \ge 0.$$

Дані процеси визначаються генератором

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x), x \in E,$$

де $\varphi(u)$- двічі диференційована функція в R, що прямує до 0 на нескінченності та з sup-нормою, $\varphi(u) \in C_0^2(R)$.

Ядро інтенсивності належить до класу $C^3(R)$. Дане ядро задовольняє умову

$$\Gamma^{\varepsilon}(0) = 0.$$

Нормуюча функція $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon)),\ g_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

В даному нормуванні $(g_2(\varepsilon))^{-1} \cdot f_2(\varepsilon) \to 1,$ при $g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon) \to 0,\ f_1(\varepsilon), f_2(\varepsilon) \to 0,\ \varepsilon \to 0.$

Розглянемо умови апроксимації Леві в проблемі великих відхилень

(L1) Апрокимація середніх

$$b_\varepsilon(x) = \int_R v\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x) = f_1(\varepsilon)b_1(x) + f_2(\varepsilon)(b(x) + \Theta_b^\varepsilon(x))$$

та

$$c_\varepsilon(x) = \int_R v^2\Gamma^\varepsilon(dv;x) = f_2(\varepsilon)(c(x) + \Theta_c^\varepsilon(x)),$$

де

$$\sup_{x\in E} |b(x)| \le b < \infty, \sup_{x\in E} |c(x)| \le c < \infty,$$

$$\left|\Theta_b^\varepsilon(x)\right| \to 0, \ \left|\Theta_c^\varepsilon(x)\right| \to 0, \ \ f_1(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

(L2) Ядро інтенсивностей має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma_q^{f(\varepsilon)}(x) = \int_R q(v)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x) = f_1(\varepsilon)(\Gamma_q(x) + \Theta_q^\delta(x))$$

для всіх обмежених $q \in C^3(R),$ таких, що $\dfrac{q(v)}{v^2} \to 0,$ коли $v \to 0.$

Ядро $\Gamma_q^{f(\varepsilon)}(x)$ є обмеженим

$$|\Gamma_q(x)| \le \Gamma_q, \Gamma_q = const.$$

Ядро $\Gamma_q(x)$ визначається таким співвідношенням

$$\Gamma_q(x) = \int_R q(v)\Gamma^0(dv;x).$$

Ядро $\Gamma^0(dv;x)$ належить класу $C^3(R).$

(L3) Умова балансу

$$\int_E \pi(dx)b_1(x) = 0.$$

(L4) Має місце співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{x\in E} \int_{|v|>c} v^2\Gamma^0(dv;x) = 0, \ \ c \to \infty,$$

що визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

(L5) Експоненційна обмеженість

$$\int_R e^{p|v|}\Gamma_q(dv;x) < \infty.$$

Теорема 4.3. Нехай виконуються умови **L1-L5**, тоді має місце слабка збіжність

$$\xi^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \xi(t) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Процес $\xi^{\varepsilon}(t)$ визначається генератором

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x) = (g_3(\varepsilon))^{-1}Q\varphi(\cdot,x) + \Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u,\cdot),$$

де

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (g_3(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x), x \in E,$$

граничний процес визначається експоненційним генератором

$$\mathrm{H}^0\varphi(u) = (\hat{b} - b_0)\varphi'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(\varphi'(u))^2 + \int_R [e^{v\varphi'(u)} - 1]\widehat{\Gamma}^0(dv)$$

$$\hat{b} = \Pi b(x) = \int_E \pi(dx)b(x), \quad b_0 = \Pi b_0(x) = \int_E \pi(dx)b_0(x),$$

$$b_0(x) = \int_R v\Gamma^0(dv;x), \ \ \sigma^2 = (\hat{c} - c_0) + 2\Pi b_1(x)R_0 b_1(x)\Pi,$$

$$\hat{c} = \Pi c(x) = \int_E \pi(dx)c(x), \ \ c_0 = \Pi c_0(x) = \int_E \pi(dx)c_0(x),$$

$$c_0(x) = \int_R v^2\Gamma^0(dv;x), \quad \hat{\Gamma}^0(v) = \Pi\Gamma^0(v;x) = \int_E \pi(dx)\Gamma^0(v;x).$$

Доведення. Розглянемо деякі допоміжні леми.

Лема 4.3. Експоненційний генератор

$$\mathrm{H}^{\varepsilon}_{\Gamma}(x)\varphi^{\varepsilon}(u) = e^{-\frac{\varphi^{\delta}_{\varepsilon}}{g_1(\varepsilon)}} g_1(\varepsilon)\Gamma^{\varepsilon}(x)e^{\frac{\varphi^{\delta}_{\varepsilon}}{g_1(\varepsilon)}}$$

в схемі апроксимації Леві має наступне асимптотичне зображення

$$\mathrm{H}^{\varepsilon}_{\Gamma}(x)\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}b_1(x)\varphi'(u) + \mathrm{H}_{\Gamma}(x)\varphi(u) + \theta^{\varepsilon}_{\Gamma}\varphi,$$

де

$$\mathrm{H}_{\Gamma}\varphi(u) = (b(x) - b_0(x))\varphi'(u) + \frac{1}{2}(c(x) - c_0(x))(\varphi'(u))^2 + \int_R (e^{v\varphi'(u)} - 1)\Gamma^0(dv;x),$$

$$b_0(x) = \int_R v\Gamma^0(dv;x), \ \ c_0(x) = \int_R v^2\Gamma^0(dv;x),$$

$$\varphi(u) \in C^3_0(R), \ |\theta^{\varepsilon,\delta}_{\Gamma}\varphi| \to 0, \text{при } \ g_1(\varepsilon) \to 0, f_1(\varepsilon) \to 0, \ \varepsilon \to 0.$$

Доведення.

$$\mathrm{H}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u) = e^{-\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}(1 + f_1(\varepsilon)\varphi_1 + g_1^2(\varepsilon)\varphi_2)^{-1} g_1(\varepsilon)\Gamma^{\varepsilon}(x)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}(1 + f_1(\varepsilon)\varphi_1 + g_1^2(\varepsilon)\varphi_2) =$$

$$= e^{-\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}(1 - f_1(\varepsilon)\varphi_1 + f_2(\varepsilon)\frac{\varphi_1^2 + f_1(\varepsilon)\varphi_1\varphi_2}{1 + f_1(\varepsilon)\varphi_1 + f_1^2(\delta)\varphi_2})(g_1(\varepsilon)\Gamma^{f(\varepsilon)}(x)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}} +$$

$$+g_1(\varepsilon)f_1(\varepsilon)\Gamma^{f(\varepsilon)}(x)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}\varphi_1+g_1(\varepsilon)f_1^2(\varepsilon)\Gamma^{f(\varepsilon)}(x)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}\varphi_2).$$

Таким чином

$$\mathrm{H}^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u)=\mathrm{H}^\varepsilon_\Gamma\varphi(u)+e^{-\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}g_1(\varepsilon)f_1(\varepsilon)(\Gamma^{f(\varepsilon)}(x)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}\varphi_1-\varphi_1\Gamma^{f(\varepsilon)}(x)e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}})+\theta^\varepsilon\varphi.$$

Розглянемо генератор

$$\mathrm{H}^\varepsilon_\Gamma(x)\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R(e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x),$$

де

$$\Delta_\varepsilon\varphi(u)=(g_1(\varepsilon))^{-1}(\varphi(u+g_1(\varepsilon)v)-\varphi(u)).$$

Експоненційний генератор можна подати наступним чином

$$\mathrm{H}^\varepsilon_\Gamma(x)\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R(e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1-\Delta_\varepsilon\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R(\Delta_\varepsilon\varphi(u)+\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x).$$

Функція $e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1-\Delta_\varepsilon\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2$ належить до класу $C^3(R)$. Крім цього, дана функція неперервна та обмежена для всіх $\varphi(u)\in C_0^2(R)$.

З умов (L1), (L2) отримуємо

$$\mathrm{H}^\varepsilon_\Gamma(x)\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}f_2(\varepsilon)\int_R(e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)}-1-\Delta_\varepsilon\varphi(u)-\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2)\Gamma^0(dv;x)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R(\Delta_\varepsilon\varphi(u)-v\varphi(u)-g_1(\varepsilon)\frac{v^2}{2}\varphi''(u))\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}f_1(\varepsilon)b_1\varphi'(u)+(g_1(\varepsilon))^{-1}f_1(\varepsilon)b\varphi'(u)+$$

$$+(g_1(\varepsilon))^{-1}f_2(\varepsilon)c\varphi''(u)+(g_1(\varepsilon))^{-1}\int_R(\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2)\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv)+(g_1(\varepsilon))^{-1}f_1(\varepsilon)\frac{1}{2}c(\varphi'(u))^2.$$

Застосувавши формулу Тейлора для функції $\varphi(u)$ та умову (L2) отримуємо наступне зображення експоненційного генератора

$$\mathrm{H}^\varepsilon_\Gamma(x)\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}f_2(\varepsilon)\int_R(e^{v\varphi'(u)}-1-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2)\Gamma^0(dv;x)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}f_2(\varepsilon)\int_R(e^{v\varphi'(u)}g_1(\varepsilon)\frac{v^2}{2}(\varphi(\tilde{u}))''-g_2(\varepsilon)\frac{v^2}{2}(\varphi(\tilde{u}))''-g_2(\varepsilon)\frac{v^4}{8}((\varphi(\tilde{u}))'')^2)\Gamma^0(dv;x)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1} f_2(\varepsilon)\int_R g_2(\varepsilon)\frac{v^3}{3!}(\varphi(\widetilde{u}))''\Gamma^0(dv;x)+(g_2(\varepsilon))^{-1} f_1(\varepsilon)\varphi'(u)+\frac{1}{2} f_2(\varepsilon)c(\varphi(\widetilde{u}))''+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1} f_2(\varepsilon)\int_R g_2(\varepsilon)\frac{v^4}{4}((\varphi(\widetilde{u}))'')^2\Gamma^0(dv;x)+(g_2(\varepsilon))^{-1} f_2(\varepsilon)c\frac{1}{2}(\varphi'(u))^2$$

Далі, застосувавши граничну умову

$$(g_2(\varepsilon))^{-1}\cdot f_2(\varepsilon)\to 1,$$

остаточно отримуємо

$$\mathrm{H}_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u)=(g_1(\varepsilon))^{-1}b_1(x)\varphi'(u)+\mathrm{H}_\Gamma(x)\varphi(u)+\theta_\Gamma^\varepsilon\varphi.$$

Лему доведено.

Розглянемо ще одну лему.

Лема 4.4. Експоненційний генератор має наступне асимптотичне зображення

$$\Gamma^{f(\varepsilon)}(x)e^{\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}}\varphi_1(u;x)=\varphi_1(u;x)\Gamma^{f(\varepsilon)}(x)e^{\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}}+(g_1(\varepsilon)f_1(\varepsilon))^{-1}\hat{\theta}_\Gamma^\varepsilon\varphi,$$

де

$$|\hat{\theta}_\Gamma^\varepsilon|\to 0,\ g_1(\varepsilon), f_1(\varepsilon)\to 0, \text{при } \varepsilon\to 0.$$

Доведення.

$$\Gamma^{f(\varepsilon)}(x)e^{\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}}\varphi_1(u;x)=g_1^{-1}(\varepsilon)\int_R[e^{\frac{\varphi(u)+g_1(\varepsilon)v}{g_1(\varepsilon)}}\varphi_1(u+g_1(\varepsilon)v;x)-e^{\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}}\varphi_1(u;x)]\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x)=$$

$$=\varphi_1(u;x)\Gamma^{f(\varepsilon)}(x)e^{\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}}+(g_1(\varepsilon)f_1(\varepsilon))^{-1}\varphi_1(u;x)g_1^{-1}(\varepsilon)f_1(\varepsilon)\int_R e^{\frac{\varphi(u)+g_1(\varepsilon)v}{g_1(\varepsilon)}}v\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x).$$

Оцінимо отриманий інтеграл

$$\int_R e^{\frac{\varphi(u)+g_1(\varepsilon)v}{g_1(\varepsilon)}}v\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x)<e^C\int_R v\Gamma^{f(\varepsilon)}(dv;x)= f_1(\varepsilon)e^C(b_1(x)+f_1(\varepsilon)b(x)+ f_1(\varepsilon)\theta_b^\varepsilon)$$

Оскільки $\theta_b^\delta\to 0,$ то

$$\Gamma^{f(\varepsilon)}(x)e^{\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}}\varphi_1(u;x)=\varphi_1(u;x)\Gamma^{f(\varepsilon)}(x)e^{\frac{\varphi(u)}{g_1(\varepsilon)}}+(g_1(\varepsilon)f_1(\varepsilon))^{-1}\hat{\theta}_\Gamma^\varepsilon\varphi.$$

Лему доведено.

Остаточно, ми отримали

$$\mathrm{H}_\Gamma^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u)=(g_1(\varepsilon))^{-1}b_1(x)\varphi'(u)+\mathrm{H}_\Gamma(x)\varphi(u)+\theta_\Gamma^\varepsilon\varphi,$$

де

$$|\theta_\Gamma^\varepsilon|\to 0, g_1(\varepsilon), f_1(\varepsilon)\to 0.$$

Розглянемо ще одну лему.

Лема 4.5. Експоненційний генератор

$$\mathrm{H}_Q^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x) = e^{-\frac{\varphi_{\varepsilon}^{\delta}}{g_1(\varepsilon)}} g_2^{-1}(\varepsilon) Q e^{\frac{\varphi_{\varepsilon}^{\delta}}{g_1(\varepsilon)}}$$

має наступне асимптотичне зображення

$$\mathrm{H}_Q^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon} = g_1^{-1}(\varepsilon)Q\varphi_1 + Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \theta_Q^{\varepsilon}\varphi,$$

де

$$|\theta_{\Gamma}^{\varepsilon}| \to 0, g_1(\varepsilon), f_1(\varepsilon) \to 0.$$

Доведення.

$$\mathrm{H}_Q^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon} = e^{-\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}(1 + f_1(\varepsilon)\varphi_1 + f_2(\varepsilon)\varphi_2)^{-1} g_2^{-1}(\varepsilon) Q e^{\frac{\varphi}{g_1(\varepsilon)}}(1 + f_1(\varepsilon)\varphi_1 + f_2(\varepsilon)\varphi_2) =$$

$$= (1 - f_1(\varepsilon)\varphi_1 + f_2(\varepsilon)\frac{\varphi_1^2 + f_1(\varepsilon)\varphi_1\varphi_2 - \varphi_2}{1 + f_1(\varepsilon)\varphi_1 + f_2(\varepsilon)\varphi_2}(f_1(\varepsilon)g_2^{-1}(\varepsilon)Q\varphi_1 + f_2(\varepsilon)g_2^{-1}(\varepsilon)Q\varphi_2) =$$

$$= f_1(\varepsilon)g_2^{-1}(\varepsilon)Q\varphi_1 + f_2(\varepsilon)g_2^{-1}(\varepsilon)Q\varphi_2 - f_2(\varepsilon)g_2^{-1}(\varepsilon)\varphi_1 Q\varphi_1 + \theta_Q^{\varepsilon}\varphi,$$

де

$$\theta_Q^{\varepsilon}\varphi = f_1(\varepsilon) f_2(\varepsilon)(g_2(\varepsilon))^{-1}\frac{\varphi_1^2 + f_1(\varepsilon)\varphi_1\varphi_2 - \varphi_2}{1 + f_1(\varepsilon)\varphi_1 + f_2(\varepsilon)\varphi_2}(Q\varphi_1 + f_1(\varepsilon)Q\varphi_2) -$$

$$- f_1(\varepsilon) f_2(\varepsilon)(g_2(\varepsilon))^{-1}\varphi_1 Q\varphi_2.$$

Використовуючи граничну умову, отримуємо

$$\mathrm{H}_Q^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon} = g_1^{-1}(\varepsilon)Q\varphi_1 + Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \theta_Q^{\varepsilon}\varphi.$$

Лему доведено.

Таким чином

$$\mathrm{H}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon} = \mathrm{H}_Q^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x) + \mathrm{H}_{\Gamma}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x).$$

З леми 4.3 та леми 4.5, отримуємо асимптотичне зображення

$$\mathrm{H}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon} = g_1^{-1}(\varepsilon)(Q\varphi_1 + b_1(x)\varphi'(u)) + Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \mathrm{H}_{\Gamma}(x)\varphi(u) + h^{\varepsilon}\varphi,$$

де

$$h^{\varepsilon}\varphi = \theta_Q^{\varepsilon}\varphi + \theta_{\Gamma}^{\varepsilon}\varphi.$$

Далі, потрібно знайти розв'язок задачі сингулярного збурення для Q

$$Q\varphi_1 + b_1(x)\varphi'(u) = 0$$

$$Q\varphi_2 - \varphi_1 Q\varphi_1 + \mathrm{H}_{\Gamma}(x)\varphi(u) = \mathrm{H}^0\varphi(u).$$

Використовуючи умову балансу, з першого рівняння отримуємо

$$\varphi_1(u;x) = R_0 b_1(x)\varphi'(u),$$

$$Q\varphi_1(u;x) = -b_1(x)\varphi'(u).$$

Підставимо отримані рівності в друге рівняння

$$Q\varphi_2 + b_1(x)R_0 b_1(x)(\varphi'(u))^2 + \mathrm{H}_\Gamma(x)\varphi(u) = \mathrm{H}^0\varphi(u).$$

З умови розв’язності

$$\mathrm{H}^0\varphi(u) = \Pi\mathrm{H}_\Gamma(x)\Pi\varphi(u) + \Pi b_1(x)R_0 b_1(x)(\varphi'(u))^2.$$

Таким чином, з леми 3, отримуємо наступне зображення генератора H^0

$$\mathrm{H}^0\varphi(u) = (\hat{b} - b_0)\varphi'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(\varphi'(u))^2 + \int_R (e^{v\varphi'(u)} - 1)\hat{\Gamma}^0(dv).$$

Теорему доведено.

З отриманих результатів випливає наступна теорема.

Теорема 4.4. Нехай процес $\xi^\varepsilon(t)$ визначається генератором

$$L^\varepsilon\varphi(u,x) = (g_3(\varepsilon))^{-1}Q\varphi(\cdot,x) + \Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u,\cdot),$$

та виконуються умови L1-L5.

Має місце слабка збіжність

$$\xi^\varepsilon(t) \Rightarrow \xi(t)$$

тоді і тільки тоді, якщо

$$(g_2(\varepsilon))^{-1} \cdot f_2(\varepsilon) \to 1.$$

Граничний процес визначається експоненційним генератором

$$\mathrm{H}^0\varphi(u) = (\hat{b} - b_0)\varphi'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(\varphi'(u))^2 + \int_R [e^{v\varphi'(u)} - 1]\hat{\Gamma}^0(dv)$$

$$\hat{b} = \Pi b(x) = \int_E \pi(dx)b(x), \quad b_0 = \Pi b_0(x) = \int_E \pi(dx)b_0(x),$$

$$b_0(x) = \int_R v\Gamma^0(dv;x), \quad \sigma^2 = (\hat{c} - c_0) + 2\Pi b_1(x)R_0 b_1(x)\Pi,$$

$$\hat{c} = \Pi c(x) = \int_E \pi(dx)c(x), \quad c_0 = \Pi c_0(x) = \int_E \pi(dx)c_0(x),$$

$$c_0(x) = \int_R v^2\Gamma^0(dv;x), \quad \hat{\Gamma}^0(v) = \Pi\Gamma^0(v;x) = \int_E \pi(dx)\Gamma^0(v;x).$$

4.3 Випадкові еволюції з локально незалежними приростами

Випадкова еволюція з локально незалежними приростами визначається співвідношенням (див. Главу 1 монографії [41]):

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(ds; x(s)), \ \ t \ge 0,$$

де $\eta(t;x)$ - неперервний справа марковський процес є процесом з локально незалежними приростами та визначається генератором

$$\Gamma(x)\varphi(u) = b(u;x)\varphi'(u) + \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\Gamma(u,dv;x).$$

Окрім цього, випадкову еволюцію можна подати у наступному вигляді

$$\xi(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t)} \big(\eta(\tau_{k+1}, x_k) - \eta(\tau_k, x_k)\big) + \eta(t - \tau_{\nu(t)}, x(t)),$$

де $(x_k, \tau_k), k \ge 0$ - марковський процес відновлення, x_k- вкладений ланцюг Маркова, заданий стохастичним ядром

$$P(x,B) = P(x_{k+1} \in B \,|\, x_k = x),$$

а τ_k- точковий момент стрибків, що визначається функцією розподілу часу перебування $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$

$$P(\theta_{k+1} \le t \,|\, x_k = x) = 1 - e^{-q(x)t}.$$

А $\nu(t)$ рахуючий стрибковий процес

$$\nu(t) = \max\{k \ge 0 : \tau_k \le t\}.$$

Таким чином, приріст випадкової еволюції на інтервалі між стрибками перемикаючого процесу дорівнює

$$\xi(\tau_k + t) - \xi(\tau_k) = \eta(t, x(t)),$$

де $0 \le t < \tau_{k+1}$.

Отож, випадкова еволюція складається з частин траєкторій марковського процесу з локально незалежними приростами $\eta(t;x)$, який залежить від перемикаючого процесу.

Такі процеси застосовуються в теорії масового обслуговування, а також в схемах апроксимації Пуассона та Леві.

Прикладами випадкових еволюцій є такі стохастичні системи:

1. Складний процес Пуассона

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} a(x_k),$$

де x_k - вкладений ланцюг Маркова стрибкового марковського процесу $x(t)$.

2. Інтегральний функціонал

$$a(t) = \int_0^t a(x(s))ds,\ t \geq 0,$$

де a - детермінована вимірна функція, визначена на фазовому просторі (E,ξ).

3. Динамічна система

$$\dot{u}(t) = C(u(t), x(t)),\ t \geq 0,$$

де C – детермінована функція, визначена в просторі $R^d \times E$.

У випадку марковського перемикання випадкова еволюція описується генератором двохкомпонентного марковського процесу $(\xi(t), x(t)), t \geq 0$

$$L\varphi(u,x) = Q\varphi(u,\cdot)(x) + \Gamma(x)\varphi(\cdot,x)(u).$$

4.4 Випадкова еволюція в схемі нелінійної апроксимації Леві

Розглянемо випадкову еволюцію в схемі апроксимації Леві із нормуючим множником $g_2(\varepsilon)$

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi_0^\varepsilon + \int_0^t \eta(ds; x(\frac{s}{g_2(\varepsilon)})),$$

де $x(t), t \geq 0$ є рівномірно ергодичним марковським процесом [41] зі стаціонарним розподілом $\pi(A)$, $g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0,$ яка задовільняє наступні умови:

EL1. Апроксимація середніх:

$$b_\varepsilon(u;x) = \int_R v\Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = g_1(\varepsilon)b_1(u;x) + g_2(\varepsilon)(b(u;x) + \theta_b^\varepsilon(u;x)),$$

та

$$c_\varepsilon(u;x) = \int_R vv^T\Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = g_2(\varepsilon)(c(u;x) + \theta_c^\varepsilon(u;x))$$

де v^* - транспонований вектор до вектора v, $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon))$, $g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$

Знехтувальні доданки $\theta_b^\varepsilon(u;x), \theta_c^\varepsilon(u;x)$ задовільняють умову

$$\sup_{x\in E}\left|\theta^\varepsilon(u;x)\right| \to 0,\ g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

EL2. Ядро інтенсивностей має вигляд

$$\Gamma_q^\varepsilon(u;x) = \int_R q(v)\Gamma^\varepsilon(u,dv;x) = g_2(\varepsilon)(\Gamma_q(u;x) + \theta_q^\varepsilon(u;x))$$

для всіх $q \in C_3(R)$ і при цьому $\Gamma_q(u;x)$ обмежена для всіх $q \in C_3(R)$, так що, $|\ \Gamma_q(u;x)\ | \le \Gamma_q = const$.

$\Gamma_q(u;x)$ визначається співвідношенням

$$\Gamma_q(u;x) = \int_R q(v)\Gamma(u,dv;x).$$

EL3. Умова балансу:

$$\int_E \pi(dx)b_1(u;x) = 0.$$

EL4. Умови на початкові значення:

$$\sup_{\varepsilon>0} E\left|\xi_0^\varepsilon\right| \le C < \infty$$

Слабка збіжність $\left|\xi_0^\varepsilon\right| \to \xi_0,\ \ g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$

EL5. Рівномірна квадратична інтегровність:

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{x\in E}\int_{v>c} vv^*\Gamma(u,dv;x) = 0.$$

EL6. Умова зростання:

Існує додатня константа L, така що

$$|b(u;x)| \le L(1+|u|),\ \ |c(u;x)| \le L(1+|u|^2)$$

для всіх дійснозначних невід’ємних функцій $f(v),\ v \in R,$ таких що,

$$\int_{R\setminus\{0\}} (1+f(v))|v|^2 dv < \infty$$

$$|\Lambda(u,v,x)| \le Lf(v)(1+|u|),$$

де $\Lambda(u,v,x)$ - похідна Радона-Нікодима ядра $\Gamma(u,B;x)$ по відношенню до міри Лебега dv в R, тобто

$$\Gamma(u,dv;x)=\Lambda(u,v;x)dv.$$

EL7. $\sup_{x\in E}\int_0^\infty e^{ht}F_x(dt)\le H<+\infty,\ \ h>0.$

EL8. Для довільного $r>0$ існує константа l_r, така що,

$$\left|\hat{b}(u)-\hat{b}(u')\right|+\left|\sigma^2(u)-\sigma^2(u')\right|+\left|\hat{\Gamma}(u,v)-\hat{\Gamma}(u',v)\right|\le l_r\left|u-u'\right|,$$

якщо $|u|\le R,\ \ v\le R.$

Теорема 4.5. За умов **EL1-EL7** має місце слабка збіжність

$$\xi^\varepsilon(t)\Rightarrow\xi^0(t),\ \ g_2(\varepsilon)\to0,\ \ \varepsilon\to0.$$

Граничний процес $\xi^0(t)$ за умови **EL8** визначається генератором

$$\hat{\Gamma}\varphi(u)=\hat{b}(u)\varphi'(u)+\int_R(\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u))\hat{\Gamma}(u,dv),$$

$$\text{де }\ \hat{b}(u)=\int_E\pi(dx)b(u;x),\ \ \Gamma(u)=\int_E\pi(dx)\Gamma(u,dv;x).$$

Доведення.

В основі доведення лежить семімартингальне зображення процесу.

Передбачувальні характеристики семімартингалу мають наступний вигляд:

$$B^\varepsilon(t)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_0^t b_\varepsilon(\xi^\varepsilon(s);x_s^\varepsilon)ds=\int_0^t b((\xi^\varepsilon(s);x_s^\varepsilon)ds+\theta_b^\varepsilon,$$

$$C^\varepsilon(t)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_0^t c_\varepsilon(\xi^\varepsilon(s);x_s^\varepsilon)ds=\int_0^t c((\xi^\varepsilon(s);x_s^\varepsilon)ds+\theta_c^\varepsilon,$$

$$\Gamma^\varepsilon(t)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_0^t\int_R q(v)\Gamma^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s),dv;x_s^\varepsilon)ds=\int_0^t\int_R q(v)\Gamma^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s),dv;x_s^\varepsilon)ds+\theta_\Gamma^\varepsilon,$$

$$\text{де }\ x_t^\varepsilon=x\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right),\ \ t\ge0,\ \ \sup_{x\in E}\left|\theta^\varepsilon\right|\to0,\ g_2(\varepsilon)\to0,\ \varepsilon\to0.$$

Стрибкова мартингальна частина семімартингалу визначається співвідношенням

$$\mu^\varepsilon(t)=\int_0^t\int_R v(\mu^\varepsilon(ds,dv;x_s^\varepsilon)-\Gamma^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s),dv;x_s^\varepsilon)ds),$$

де $\mu^\varepsilon(ds,dv;x)$ - сім'я рахуючих мір, при чому

$$E\mu^\varepsilon(ds,dv;x)=\Gamma^\varepsilon(u,dv;x)ds.$$

Позначимо через $A^{\varepsilon}(t)$ основну частину будь-якої з передбачувальних характеристик.

Розглянемо трьохкомпонентний марковський процес $A^{\varepsilon}(t)$, $\xi^{\varepsilon}(t)$, $x^{\varepsilon}(t)$.

Даний процес може характеризуватись мартингалом

$$\mu^{\varepsilon}(t) = \varphi(A_t^{\varepsilon}, \xi_t^{\varepsilon}, x_t^{\varepsilon}) - \int_0^t \Gamma^{\varepsilon}(\varphi(A_s^{\varepsilon}, \xi_s^{\varepsilon}, x_s^{\varepsilon}))ds$$

Даний генератор має наступне асимптотичне зображення

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,v;x) = (g_2(\varepsilon))^{-1}Q\varphi(\cdot,\cdot;x) + A(u;x)\varphi(\cdot,v;\cdot) + \Gamma^{\varepsilon}(x)P\varphi(u,\cdot;\cdot),$$

де P – оператор переходу, асоційований з $P(x,B)$,

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_E P(x,dy)(\varphi(\cdot;y) - \varphi(\cdot;x)),$$

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_{R^d}(\varphi(u+v) - \varphi(u))\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x).$$

Для доведення збіжності передбачувальних характеристик достатньо розглянути дію оператора L^{ε} на тест-функціях двох змінних.

В такому випадку оператор має наступне зображення

$$L^{\varepsilon}\varphi(v;x) = ((g_2(\varepsilon))^{-1}Q + A(u;x)P + g_2(\varepsilon)\theta^{\varepsilon}(x)P)\varphi(v;x).$$

Задача сингулярного збурення для оператора має вигляд $L^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon} = \hat{L}\varphi + \theta^{\varepsilon}\varphi$, де $\varphi^{\varepsilon}(v;x) = \varphi(v) + g_2(\varepsilon)\varphi_1(v;x)$.

Розв'язок задачі сингулярного збурення має зображення

$$\hat{L} = \hat{A}(u), \quad \hat{A}(u) = \Pi A(u;x)\Pi = \int_E \pi(dx)A(u,x).$$

Таким чином

$$\hat{A}(u)\varphi(u) = \hat{a}(u)\varphi'(v), \text{ де } \hat{a}(u) = \int_E \pi(dx)a(u;x).$$

Підставивши оператори $B(u;x)$, $C(u;x)$, $\Gamma(u;x)$ замість $A(u;x)$, отримуємо наступні передбачувальні характеристики

$$B^0(t) = \int_0^t \hat{b}(\xi^0(s))ds, \quad C^0(t) = \int_0^t \hat{c}(\xi^0(s))ds, \quad \Gamma_q^0(t) = \int_0^t \hat{\Gamma}_q(\xi^0(s))ds.$$

Отже, слабку збіжність доведено.

Теорему доведено.

Приклад 4.1.Перевірку виконання умов Леві проведемо на сімействі випадкових величин

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = b(u,x)\} = g_2(\varepsilon)p,$$

$$P\{\alpha^{\varepsilon} = g_1(\varepsilon)\alpha_1(u,x) + g_2(\varepsilon)b_1(u,x)\} = 1 - g_2(\varepsilon)p.$$

Знайдемо перший момент α^{ε}

$$E\alpha^{\varepsilon} = g_2(\varepsilon)pb(u,x) + g_1(\varepsilon)\alpha_1(u,x) + g_2(\varepsilon)b_1(u,x) - g_1(\varepsilon)g_2(\varepsilon)p\alpha_1(u,x) -$$

$$- g_2^2(\varepsilon)pb_1(u,x) = g_1(\varepsilon)\alpha_1(u,x) + g_2(\varepsilon)(pb(u,x) + b_1(u,x)) + o(g_2(\varepsilon)).$$

Знайдемо другий момент α^{ε}

$$E(\alpha^{\varepsilon})^2 = g_2(\varepsilon)pb^2(u,x) + (g_1(\varepsilon)\alpha_1(u,x) + g_2(\varepsilon)b_1(u,x))^2(1 - g_2(\varepsilon)p) =$$

$$= g_2(\varepsilon)pb^2(u,x) + o(g_2(\varepsilon)).$$

Таким чином сімейство марковських процесів α^{ε} задовільняє умови апроксимації Леві.

Відповідно до вище наведеної теореми, існує слабка збіжність

$$\xi^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \xi^{0}(t), \;\; g_2(\varepsilon) \to 0, \;\; \varepsilon \to 0.$$

З даної збіжності випадкових процесів випливає збіжність генераторів, якими ці процеси описуються, тобто

$$\sup_{|\varphi|\le 1}\left|\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u)\right| \Rightarrow \sup_{|\varphi|\le 1}\left|\hat{\Gamma}\varphi(u)\right|$$

Розпишемо генератори

$$\sup_{|\varphi|\le 1}\left|b(u)\varphi'(u) + \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x)\right| \Rightarrow$$

$$\sup_{|\varphi|\le 1}\left|\hat{b}(u)\varphi'(u) + \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)I_{\{v\le 1\}})\hat{\Gamma}(u,dv;x)\right|$$

Тому,

$$\sup_{|\varphi|\le 1}\left|b(u)\varphi'(u)\right| \to \sup_{|\varphi|\le 1}\left|\hat{b}(u)\varphi'(u)\right|$$

$$\sup_{|\varphi|\le 1}\left|(b(u) - \hat{b}(u))\varphi'(u)\right| \to \left|b(u) - \hat{b}(u)\right|\sup_{|\varphi|\le 1}\left|\varphi'(u)\right| \to 0$$

Отже,

$$\left|b(u) - \hat{b}(u)\right| \to 0$$

$$b(u)-\hat{b}(u)=b(u)-\Pi b(u)=(\mathrm{I}-\Pi)b(u)=\begin{cases}0, b(u)\in N_Q\\ b(u), b(u)\in R_Q\end{cases}$$

Згідно з умовою EL1

$$b(u)=(b_\varepsilon-g_1(\varepsilon)b_1)(g_2(\varepsilon))^{-1}-\theta_b^\varepsilon\to 0.$$

$$\frac{b_\varepsilon-g_1(\varepsilon)b_1}{g_2(\varepsilon)}-\theta_b^\varepsilon=\frac{\int\limits_R v\Gamma^\varepsilon(u,dv;x)-g_1(\varepsilon)b_1}{g_2(\varepsilon)}-\theta_b^\varepsilon=\frac{g_2(\varepsilon)\int\limits_R v\Gamma(u,dv;x)-g_1(\varepsilon)b_1}{g_2(\varepsilon)}-\theta_b^\varepsilon=$$
$$=\int\limits_R v\Gamma(u,dv;x)-\frac{g_1(\varepsilon)}{g_2(\varepsilon)}b_1-\theta_b^\varepsilon=0$$

Таким чином

$$\frac{g_1(\varepsilon)}{g_2(\varepsilon)}=\frac{\int\limits_R v\Gamma(u,dv;x)+\theta_b^\varepsilon}{b_1}$$

Аналогічно, розглянемо інтегральну збіжність

$$\sup_{|\varphi|\le 1}\left|\int\limits_R(\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u))\Gamma^\varepsilon(u,dv;x)\right|\Rightarrow$$
$$\sup_{|\varphi|\le 1}\left|\int\limits_R(\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)I_{\{v\le 1\}})\Gamma(u,dv;x)\right|$$

$$\sup_{|\varphi|\le 1}\left|\int\limits_R(\varphi(u+v)-\varphi(u))(\Gamma^\varepsilon(u,dv;x)-\hat{\Gamma}(u,dv;x))\right|\to 0$$

Звідси

$$\Gamma^\varepsilon(u,x)\to\hat{\Gamma}(u,x)$$

Згідно з умовою EL2

$$g_2(\varepsilon)(\Gamma(u,x)+\theta_\Gamma^\varepsilon)-\Pi\Gamma(u,x)=0$$

$$g_2(\varepsilon)=\frac{\Pi\Gamma(u,x)}{\Gamma(u,x)+\theta_\Gamma^\varepsilon}=\frac{\int\limits_R\pi(dx)\Gamma(u,dv;x)}{\Gamma(u,x)+\theta_\Gamma^\varepsilon}$$

Виразимо нормуючу функцію $g_1(\varepsilon)$

$$g_1(\varepsilon)=\frac{\int\limits_R v\Gamma(u,dv;x)+\theta_b^\varepsilon}{b_1}g_2(\varepsilon)=\frac{(\int\limits_R v\Gamma(u,dv;x)+\theta_b^\varepsilon)\int\limits_R\pi(dx)\Gamma(u,dv;x)}{b_1(\Gamma(u,x)+\theta_\Gamma^\varepsilon)}.$$

Таким чином знайдено нелінійні нормуючі функції для випадкових еволюцій в схемах апроксимації Леві.

4.5 Імпульсні рекурентні процеси

Імпульсні процеси $\tilde{\xi}(t)$ в евклідовому просторі R^d з марковським або напівмарковським перемиканням $x(t)$ означається за допомогою суми випадкових величин на вкладеному ланцюзі Маркова

$$\tilde{\xi}(t) = \tilde{\xi}_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t)} \alpha_k(x_{k-1}), t \geq 0,$$

де $x(t)$ - перемикаючий марковський процес, якому відповідає вкладений марковський процес відновлення $(x_k, \tau_k), k \geq 0,$ де $x_k = x\ (\tau_k)$ та рахуючий процес стрибків $\nu(t) = \max\{k \geq 0 : \tau_k \leq t\},\ \alpha_k(x_{k-1})$ - сімейство випадкових величин.

Розглянемо імпульсні рекурентні процеси з дискретним часом. Такі процеси визначаються наступним чином

$$\tilde{\xi}(t) = \tilde{\xi}_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t)} \alpha_k(\xi_k, x_{k-1}).$$

Слід зазначити, що двокомпонентний процес $(\tilde{\xi}(t), x(t))$ є адитивним марковським процесом.

4.6 Імпульсний рекурентний процес в схемі нелінійної апроксимації Леві

Розглянемо імпульсний рекурентний процес в умовах апроксимації Леві з нелінійним нормуванням

$$\tilde{\xi}^{\varepsilon}(t) = \tilde{\xi}_0^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{\nu\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)} \alpha_k^{\varepsilon}(x_{k-1}^{\varepsilon}),\ t \geq 0,$$

де $x^{\varepsilon}(t) = x\left(\dfrac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)$ - перемикаючий марковський процес, якому відповідає вкладений марковський процес відновлення $(x_k^{\varepsilon}, \tau_k^{\varepsilon}),\ k \geq 0,$ та рахуючий процес стрибків $\nu^{\varepsilon}(t) = \nu\left(\dfrac{t}{g_2(\varepsilon)}\right).$

Таким чином τ_k^{ε} - моменти стрибків даного процесу, а

$$x_k^{\varepsilon} = x^{\varepsilon}(\tau_k^{\varepsilon})$$

$$\nu^{\varepsilon}(t) = \max\{k \geq 0 : \tau_k^{\varepsilon} \leq t\}.$$

Розглянемо умови апроксимації Леві

L1. Апроксимація середніх:

$$b_{\varepsilon}(u;x) = \int_{R^d} v\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x) = g_1(\varepsilon)b_1(u;x) + g_2(\varepsilon)(b(u;x) + \theta_b^{\varepsilon}(u;x)),$$

та

$$c_{\varepsilon}(u;x) = \int_{R^d} vv^*\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x) = g_2(\varepsilon)(c(u;x) + \theta_c^{\varepsilon}(u;x)),$$

де v^* - транспонований вектор до вектора v, $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon)),$ $g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$

Знехтувальні доданки $\theta_b^{\varepsilon}(u;x),\ \theta_c^{\varepsilon}(u;x)$ задовільняють умову

$$\sup_{\substack{x \in E \\ u \in R}} \left|\theta^{\varepsilon}(u;x)\right| \to 0,\ g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

L2. Ядро інтенсивностей має вигляд

$$\Gamma_q^{\varepsilon}(u;x) = \int_{R^d} q(v)\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x) = g_2(\varepsilon)(\Gamma_q(u;x) + \theta_q^{\varepsilon}(u;x))$$

для всіх $q \in C_3(R)$ і ядро $\Gamma_q(u;x)$ обмежене для всіх $q \in C_3(R),\ u \in R, x \in E$

так що, $|\ \Gamma_q(u;x)\ | \leq K < \infty$.

Ядро $\Gamma_q(u;x)$ визначається співвідношенням

$$\Gamma_q(u;x) = \int_{R^d} q(v)\Gamma(u,dv;x).$$

L3. Умова балансу:

$$\int_E \rho(dx)b_1(u;x) = 0,$$

де $\rho(dx)$ задовольняє умову ергодичності зі стаціонарним розподілом $\pi(A), A \in E$

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q = 1/m, m = \int_E \rho(dx)m(x), \rho(B) = \int_E \rho(dx)P(x,B), \rho(E) = 1.$$

L4. Умови на початкові значення:

$$\sup_{\varepsilon>0} E\left|\xi_0^\varepsilon\right| \le C < \infty$$

$$\left|\xi_0^\varepsilon\right| \to \xi_0,\ \ g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

L5. Рівномірна квадратична інтегровність:

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{x\in E} \int_{v>c} vv^* \Gamma(u,dv;x) = 0.$$

L6. Умова зростання:

Існує додатня константа L, така що

$$\left|b(u;x)\right| \le L(1+|u|),\ \ \left|c(u;x)\right| \le L(1+|u|^2)$$

Тоді для всіх дійснозначних невід’ємних функцій $f(v),\ v \in R,$ таких що,

$$\int_{R^d\setminus\{0\}} (1+f(v))|v|^2 dv < \infty$$

$$\left|\Lambda(u,v,x)\right| \le Lf(v)(1+|u|),$$

де $\Lambda(u,v,x)$ - похідна Радона-Нікодима ядра $\Gamma(u.,B;x)$ по відношенню до міри Лебега dv в R, тобто

$$\Gamma(u,dv;x) = \Lambda(u,v;x)dv.$$

L7. Для довільного $r > 0$ існує константа l_r, така що,

$$\left|\hat{b}(u) - \hat{b}(u')\right| + \left|\sigma^2(u) - \sigma^2(u')\right| + \left|\hat{\Gamma}(u,v) - \hat{\Gamma}(u',v)\right| \le l_r|u-u'|,$$

якщо $|u| \le r,\ \ |v| \le r.$

Означення 4.2. Нехай реалізації випадкових процесів $\xi_n(t)$ та $\xi(t)$ належать деякому метричному простору. Тоді випадковий процес $\xi_n(t)$ слабо збігається до $\xi(t),$ якщо виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\mu_n(dx) = \int f(x)\mu(dx),$$

де μ_n та μ - міри випадкових процесів $\xi_n(t)$ та $\xi(t)$ відповідно, а $f(x)$ - функціонал, для якого виконується умова

$$Ef(\xi(t)) = \int f(x)\mu(dx),$$

$f(\xi(t))$ - розподіл випадкового процесу $\xi(t)$.

Теорема 4.4. За умов **L1-L6** має місце слабка збіжність

$$\tilde{\xi}^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \tilde{\xi}^{0}(t), \;\; g_2(\varepsilon) \to 0, \;\; \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\tilde{\xi}^{0}(t)$ є процесом Леві і за умови **L7** визначається генератором

$$\hat{L}\varphi(u) = (\hat{b}(u) - \hat{b}_0(u) + \hat{b}_1(u))\varphi'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\varphi''(u) + \lambda(u)\int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u))\Gamma^0(u,dv),$$

$$\text{де } \hat{b}_1(u,x) = q(x)\int_E P(x,dy)b_1(u;y), \; \Gamma(u,dv) = q\int_E \rho(dx)\Gamma(u,x;dv),$$

$$\sigma^2(u) = 2q\int_E \rho(dx)(\hat{b}_1(u;x)R_0\hat{b}_1^*(u;x) + \frac{1}{2}(c(u;x) - c_0(u;x))), \;\; \sigma^2(u) > 0,$$

$$\lambda(u) = q\Gamma(u,R), \;\; \Gamma^0(u;dv) = \frac{\Gamma(u;dv)}{\Gamma(u;R)}.$$

Доведення.

В основі доведення лежить семімартингальне зображення процесу.

Передбачувальні характеристики семімартингалу мають наступний вигляд:

$$B^{\varepsilon}(t) = \sum_{k=1}^{\nu(\frac{t}{g_2(\varepsilon)})} b_{\varepsilon}(\tilde{\xi}^{\varepsilon}_{k-1}; x^{\varepsilon}_{k-1}) = g_1(\varepsilon)\sum_{k=1}^{\nu(\frac{t}{g_2(\varepsilon)})} b_1(\tilde{\xi}^{\varepsilon}_{k-1}; x^{\varepsilon}_{k-1}) + g_2(\varepsilon)\sum_{k=1}^{\nu(\frac{t}{g_2(\varepsilon)})} b(\tilde{\xi}^{\varepsilon}_{k-1}; x^{\varepsilon}_{k-1}) + \theta^{\varepsilon}_b,$$

$$C^{\varepsilon}(t) = \sum_{k=1}^{\nu(\frac{t}{g_2(\varepsilon)})} c_{\varepsilon}(\tilde{\xi}^{\varepsilon}_{k-1}; x^{\varepsilon}_{k-1}) = g_2(\varepsilon)\sum_{k=1}^{\nu(\frac{t}{g_2(\varepsilon)})} c(\tilde{\xi}^{\varepsilon}_{k-1}; x^{\varepsilon}_{k-1}) + \theta^{\varepsilon}_c,$$

$$\Gamma^{\varepsilon}(t) = \sum_{k=1}^{\nu(\frac{t}{g_2(\varepsilon)})} \int_R g(v)\Gamma^{\varepsilon}(\tilde{\xi}^{\varepsilon}_{k-1}, dv; x^{\varepsilon}_{k-1}) = g_2(\varepsilon)\sum_{k=1}^{\nu(\frac{t}{g_2(\varepsilon)})} \int_R g(v)\Gamma(\tilde{\xi}^{\varepsilon}_{k-1}, dv; x^{\varepsilon}_{k-1}) + \theta^{\varepsilon}_g,$$

$$\text{де } \sup_{x\in E}|\theta^{\varepsilon}| \to 0, \;\; g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Позначимо через $A^{\varepsilon}(t)$ основну частину будь-якої з передбачувальних характеристик.

Розглянемо трьохкомпонентний марковський процес $A^{\varepsilon}(t), \tilde{\xi}^{\varepsilon}(t), x^{\varepsilon}(t)$. Даний процес характеризується мартингалом

$$\mu^{\varepsilon}(t) = \varphi(\tilde{\xi}^{\varepsilon}(t), A^{\varepsilon}(t), x^{\varepsilon}(t)) - \int_0^t L^{\varepsilon}\varphi(\tilde{\xi}^{\varepsilon}(t), A^{\varepsilon}(s), x^{\varepsilon}(s))ds,$$

де генератор L^{ε} має вигляд

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,v;x) = (g_2(\varepsilon))^{-1}Q\varphi(\cdot,\cdot;x) + Q_0 A^{\varepsilon}(u;x)\varphi(\cdot,v;x) + Q_0\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u,\cdot;x),$$

де

$$Q_0\varphi(\cdot,\cdot;x) = q(x)\int_E P(x,dy)\varphi(\cdot,\cdot;y),$$

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u,\cdot;\cdot) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R \Gamma^{\varepsilon}(u,x;dv)(\varphi(u+v)-\varphi(u)),$$

$$A^{\varepsilon}(u;x)\varphi(\cdot,v;\cdot) = (g_2(\varepsilon))^{-1}(\varphi(\cdot,v+g_2(\varepsilon)a(u;x);\cdot) - \varphi(\cdot,v;\cdot)).$$

Далі потрібно знайти зображення граничного оператора. Подіємо генератором на тест-функції $\varphi^{\varepsilon}(u;x) = \varphi(u) + g_1(\varepsilon)\varphi_1(u;x) + g_2(\varepsilon)\varphi_2(u;x)$.

Отримаємо

$$L^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x) = ((g_2(\varepsilon))^{-1}Q + Q_0\Gamma^{\varepsilon}(x))(\varphi(u) + g_1(\varepsilon)\varphi_1(u;x) + g_2(\varepsilon)\varphi_2(u;x)).$$

Запишемо асимптотичне зображення генератора

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (((g_1(\varepsilon))^{-1}B_1(u;x) + \Gamma(u;x))\varphi(u) + \theta^{\varepsilon} = (g_1(\varepsilon))^{-1}b_1(u;x)\varphi'(u) +$$
$$+ (b(u;x) - b_0(u;x))\varphi'(u) + \frac{1}{2}(c(u;x) - c_0(u;x))\varphi''(u) + \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u))\Gamma(u,dv;x) + \theta^{\varepsilon},$$

де $b_0(u;x) = \int_R v\Gamma(u,dv;x),\ \ c_0(u;x) = \int_R vv^*\Gamma(u,dv;x).$

Отримуємо задачу сингулярного збурення

$$Q\varphi(u) = 0$$

$$Q\varphi_1(v;x) + Q_0 b_1(u;x)\varphi'(u) = 0$$

$$Q\varphi_2(v;x) + Q_0 b_1(u;x)\varphi_1'(u;x) + Q_0\Gamma(u;x)\varphi(u) = \hat{L}\varphi(u).$$

Застосувавши умови L3 та L7 остаточно отримаємо граничний генератор.

Теорему доведено.

Таким чином знайдено граничний генератор імпульсного рекурентного процесу з нелінійним нормуванням.

Висновки до розділу 4.

В цьому розділі розглянуто випадкову еволюцію в схемі апроксимації Леві із нормуючим множником $g_2(\varepsilon)$

$$\xi^{\varepsilon}(t) = \xi_0^{\varepsilon} + \int_0^t \eta_{\varepsilon}(ds; x(\frac{s}{g_2(\varepsilon)}))$$

Для даної марковської еволюції знайдено асимптотичне зображення генератора в нелінійному нормуванні та визначено умови апроксимації Леві.

Також, показано слабку збіжність випадкових еволюцій в схемі пуассонової апроксимації в проблемі великих відхилень та виведено необхідні та достатні умови для її існування

$$\xi^{\varepsilon}(t) \to \xi(t) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\xi(t)$ визначається генератором

$$L^{\varepsilon}\varphi(u,x) = (g_2(\varepsilon))^{-1} Q\varphi(\cdot,x) + \Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u,\cdot),$$

де

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u + g_1(\varepsilon)v) - \varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv; x), x \in E,$$

визначається експоненційним генератором

$$\mathrm{H}^0\varphi(u) = \hat{b}\varphi'(u) + \int_R [e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)]\widehat{\Gamma}^0(dv)$$

Слабка збіжність марковських випадкових еволюцій має місце і в нелінійній апроксимації Леві.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню генераторів марковських процесів та марковських випадкових еволюцій при нелінійному нормуванні. Дані процеси розглядаються в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві.

Для генераторів марковських випадкових процесів знайдено асимптотичне зображення генераторів в схемах нелінійних апроксимацій. Крім цього, доведено існування граничного оператора та знайдено асимптотичне зображення генераторів в багатовимірному просторі.

Також розглянуто проблему великих відхилень. Знайдено розв'язок через нелінійний експоненційний генератор в схемах нелінійних апроксимацій.

Досліджено марковські випадкові еволюції. Генератори даних еволюцій нормуються нелінійними функціями. В схемі апроксимації Леві знайдено асимптотичне зображення генераторів марковських випадкових еволюцій.

Крім цього, марковські еволюції розглядаються в проблемі великих відхилень. Знайдено граничний генератор, що визначає розв'язок проблеми великих відхилень для генератора марковських еволюцій в схемі апроксимації Леві. Також, розглядаються імпульсні рекурентні процеси в схемі нелінійної апроксимації Леві.

У дисертації отримано наступні нові наукові результати:

- отримано необхідні та достатні умови існування граничних генераторів в схемах нелінійних апроксимацій;
- знайдено нелінійні нормуючі функції в представленні генераторів марковських процесів в схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві;
- показано існування нелінійних нормуючих функцій;

- знайдено розв'язок проблеми великих відхилень в умовах нелінійних апроксимацій та показано зв'язок між нелінійними нормуючими функціями;
- знайдено нелінійні нормуючі функції для марковських випадкових еволюцій;
- досліджено імпульсні рекурентні процеси з нелінійним нормуванням в схемі апроксимації Леві.

Отримані в дисертаційній роботі результати мають теоретичне значення для вивчення теорії випадкових процесів. Проте, дані результати можуть бути використані у застосуваннях до теорії масового обслуговування, теорії надійності, фінансової математики та природничих наук.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вентцель А.Д. Грубые предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. I / А.Д. Вентцель // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – Том 21, №2. – С. 235-252.
2. Вентцель А.Д. Грубые предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. II / А.Д. Вентцель // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – Том 21, №3. – С. 512-526.
3. Вентцель А.Д. Грубые предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. III / А.Д. Вентцель // Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – Том 24, №4. – С. 673-691.
4. Вентцель А.Д. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений / А.Д. Вентцель, М.И. Фрейдлин. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
5. Гихман И.И. Теория случайных процессов: в 3 т. / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1973. – Т.2. – 640 с.
6. Королюк В.С. Великі відхилення для імпульсних процесів накопичення в схемі фазового укрупнення / В.С. Королюк, І.В. Самойленко // Доповіді НАН України. – 2014. - №7. – С. 28-35.
7. Королюк В.С. Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой дифузии / В.С. Королюк // Доповіді НАН України. – 2010. - №6. – С. 22-26.
8. Королюк В.С. Математические основы фазового укрупнения сложных систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1978. – 220 с.
9. Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложение / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наукова думка, 1976. – 184 с.
10. Королюк В.С. Полумарковские случайные эволюции / В.С. Королюк, А.В. Свищук. – К.: Наукова думка, 1992. – 256 с.

11. Королюк В.С. Потенціальний оператор процесу Орнштейна-Уленбека та його застосування / В.С. Королюк, І.В. Самойленко // Доповіді НАН України. – 2013. - №3. – С. 21-27.
12. Королюк В.С. Предельное представление непрерывных полумарковских случайных эволюций в схеме серий / В.С. Королюк, А.В. Свищук // Украинский математичекий журнал. – 1989. - №11. – С. 1476-1482.
13. Королюк В.С. Слабая сходимость полумарковских случайных эволюций в схеме усреднения / В.С. Королюк, А.В. Свищук // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. - №41. – С. 80-95.
14. Самойленко І.В. Асимптотичний розклад напівмарковської випадкової еволюції / І.В. Самойленко // Український математичний журнал. – 2006. – 58, №9. – С.1234-1248.
15. Самойленко І.В. Великі відхилення для імпульсних процесів в схемі апроксимації Леві / І.В. Самойленко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2013. - №88. – С. 106-114.
16. Самойленко І.В. Великі відхилення для імпульсних процесів в схемі пуассонової апроксимації / І.В. Самойленко // Український математичний журнал. – 2012. – 64, №11. – С.1526-1535.
17. Турбин А.Ф. Предельные теоремы для динамических систем с коэффициентами, зависящими от марковского процесса / А.Ф. Турбин, О.С. Хохель // Прикладные задачи теории вероятностей. – К.: Инст. матем. АН УССР, 1982. – С.117-133.
18. Турбин А.Ф. Регулярные приближения к решениям сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / А.Ф. Турбин – К.: Институт математики АН УССР, 1979. – 39 с.
19. Хасьминский Р.З. О случайных процесах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром / Р.З.

Хасьминский // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – Том 11, №2. – С. 240-259.

20. Хасьминский Р.З. Предельная теорема для решения дифференциальных уравнений со случайной правой частью / Р.З. Хасьминский // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – Том 11, №3. – С. 444-462.
21. Чабанюк Я.М. Апроксимація дифузійним процесом в схемі усереднення / Я.М. Чабанюк // Доповіді НАН України. – 2004. - №12. – С. 35-40.
22. Чабанюк Я.М. Неперервна процедура стохастичної апроксимації у напівмарковському середовищі / Я.М. Чабанюк // Український математичний журнал. – 2004. – 56, №5. – С. 713-720.
23. Чабанюк Я.М. Непрерывная процедура стохастической аппроксимации с сингулярным возмущением в условиях баланса / Я.М. Чабанюк // Кібернетика і системний аналіз. – 2006. - №3. – С. 1-7.
24. Чабанюк Я.М. Стійкість динамічної системи з напівмарковськими переключеннями в умовах дифузійної апроксимації / Я.М. Чабанюк // Український математичний журнал. – 2007. – 59, №9. – С.1290-1297.
25. Чабанюк Я.М. Стійкість динамічної системи з напівмарковськими перемиканнями за умов стійкості усередненої системи / Я.М. Чабанюк, В.С. Королюк // Український математичний журнал. – 2002. – 54, №9. – С.195-204.
26. Ярова О.А. Нелінійна апроксимація в проблемі великих відхилень / О.А. Ярова, Я.І. Єлейко // XXIX International Conference “Problems of decision and making under uncertainties” (PDMU-2017), May 10-13, 2017, Mukachevo, Ukraine
27. Ярова О.А. Нелінійне нормування випадкової еволюції в схемі апроксимації Леві / Ярова О.А. // Кібернетика та системний аналіз. 2018. Том 54, №3. С. 160-165.
28. Ярова О.А. Нелінійне нормування генераторів марковських процесів у просторі R^d / Ярова О.А. // Вісник ЛНУ. Серія мех.-мат. –

2018. - №83. – С. 202-207

29. Ярова О.А. Про поведінку нормуючого множника генератора в апроксимації випадкових процесів / Ярова О.А, Єлейко Я.І. // Кибернетика и системный анализ. – 2016. – Том 52, №2. – С. 147-153
30. Gorostiza L. A central limit theorem for a class of d-dimential random motions with constant speed / L. Gorostiza //Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – No. 78. – P. 575-577.
31. Gorostiza L. The central limit theorem for random motions of d-dimentional Euclidean space / L. Gorostiza // Annals of Probability – 1973. – No. 1. – P. 603-612.
32. Griego R. Random evolutions, Markov chains and systems of partial differential equations / R. Griego, R. Hersh // Proc. Nath. Acad. Sci. – 1969. – No. 62. – P. 305-308.
33. Griego R. Theory of random evolutions with applications to partial differential equations / R. Griego, R. Hersh // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – No. 156. – P. 405-418.
34. Hersh R. Random evolutions: survey of results and problems / R. Hersh // Rocky Mount. J. Math. – 1974. – No. 4. – P. 443-477.
35. Hersh R. Non-commuting random evolutions, and an operator-valued Feynman-Kac formula / R. Hersh, G. Papanicolaou // Comm. Pure and Appl. Math. – 1972. – XX. P. 337-367.
36. Koroliuk V.S. Large deviations for random evolutions in the scheme of asymptotically small diffusion / V.S. Koroliuk, I.V. Samoilenko // Modern stochastics and applications, Springer optimization and its applications. – 2014. Vol. 90. – P. 201-217.
37. Koroliuk V.S. Levy approximation of impulsive recurrent process with semi-Markov switching / V.S. Koroliuk, N. Limnios, I.V. Samoilenko // Theory of stochastics processes. – 2010. 16(32), No. 2. – P. 77-85.
38. Koroliuk V.S. Levy approximation of processes with locally independent increments and semi-Markov switching / V.S. Koroliuk, N. Limnios, I.V.

Samoilenko // Український математичний вісник. – 2009. – Т. 6, №3. – С. 343-356.

39. Koroliuk V.S. Poisson approximation of impulsive recurrent process with semi-Markov switching / V.S. Koroliuk, N. Limnios, I.V. Samoilenko // Stochastic analysis and applications. – 2011. No. 29. – P. 769-778.
40. Koroliuk V.S. Poisson approximation of process with locally independent increments and semi-Markov switching – Toward application in reliability / V.S. Koroliuk, N. Limnios, I.V. Samoilenko // Advances on degradation models with applications to reliability, Survival analysis and finance, Birkhauser. – 2010. P. 105-116.
41. Koroliuk V.S. Stochastic systems in merging phase space / V.S. Koroliuk, N. Limnios. – Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005. – 348 p.
42. Kurtz T.G. Martingale problems for controlled processes / T.G. Kurtz // Lecture notes in control and information sciences. – Berlin: Springer, 1987. Vol. 91., P. 75-90
43. Limnios N. Poisson approximation of processes with locally independent increments with Markov switching / N. Limnios, I.V. Samoilenko // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2013. - №89. – С. 106-116.
44. Nisio M. On a non-linear semi-group attached to stochastic optimal control / M. Nisio // Publ. RIMS, Kyoto Univ. – 1976. – No. 13. – P. 513-537.
45. Nisio M. On stochastic optimal control and envelope of Markovian semi-group / M. Nisio // Proc. Intern. Symp. SDE, Kyoto. – Kinokyniya, 1976. P. 297-325.
46. Papanicolaou G. Asymptotic analysis of transport processes / Papanicolaou G. // Bull. Amer. Math. Soc. – 1975. No. 81. – P. 330-392.
47. Papanicolaou G. Martingale approach to some limit theorems / G. Papanicolaou, D. Stoock, S.R.S. Varadhan – Duke turbulence conference (Durham, NC, April 23-25, 1976). Duke University Mathematics Series III. – 1977. – New York: Duke University. – 120 p.

48. Papanicolaou G. Motion of a particle in a random field / G. Papanicolaou //J. Math. Phys. – 1971. – No. 12. – P. 1494-1496
49. Papanicolaou G. Probabilistic problems and methods in singular perturbations / G. Papanicolaou // Rocky Mountain Journal of Math. – 1976. No. 6. – P. 653-673.
50. Papanicolaou G. Some limit theorems for stochastic equations and applications / G. Papanicolaou, R. Hersh // Indiana U. Math. J. – 1972. – No. 21. – P. 815-840.
51. Pinsky M. Differential equations with small parameter and the central limit theorem for function defined on a finite Markov chain / M. Pinsky // Z. Wahrsghein. verw. Gebiete. – 1968. – No. 2. – P. 101-111.
52. Samoilenko I.V. Asymptotic expansion for the functional of Markovian evolution in R^d in the circuit of diffusion approximation / I.V. Samoilenko // Journal of applied mathematics and stochastic analysis. – 2005. – No. 3. – P. 247-257.
53. Samoilenko I.V. Asymptotic expansion of Markov random evolution / I.V. Samoilenko // Український математичний вісник. – 2006. – Т.3., №3. – С. 394-407.
54. Samoilenko I.V. Large deviations for random evolutions with independent increments in the scheme of the Poisson approximation / I.V. Samoilenko // Theory of probability and mathematical statistics. – 2012. – No. 85. – P. 107-114.
55. Wentzell A.D. Limit theorems on large deviations for Markov stochastics processes / A.D. Wentzell // Dordrecht: Kluwer, 1990. – 176 p.
56. Yarova O. About selection a small normalization parameter for generator of random process / Yarova O. // Вісник ЛНУ. Серія мех.-мат. – 2016. - №81. – С. 159-162.
57. Yarova O. Behaviour of generator normalization factor in approximation of random processes / Yarova O., Yeleyko Ya. // International Conference “Probability, Reliability and Stochastic Optimization”, Kyiv,

Ukraine, April 7-10, 2015, Taras Shevchenko National University of Kyiv.

58. Yarova O. Nonlinear approximation for Markov Evolutions / Yarova O., Yeleyko Ya. // XXX International Conference “Problems of decision and making under uncertainties” (PDMU-2017), August 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania.
59. Yarova O.A. Nonlinear Approximation in the Large Deviations Principle / Yarova O.A., Yeleyko Ya.I. // Statistics, Opt. Inform. Comput. – Vol. 6, December 2018, pp. 600-608.
60. Yarova O. Nonlinear normalization for impulse recurrent process in the scheme of Levi approximation / Yarova O. // XXXI International Conference “Problems of decision and making under uncertainties” (PDMU-2018), July 3-8, 2018, Lankaran-Baku, Republic of Azerbaijan.
61. Yarova O. Nonlinear normalization of generator of Markov processes / Yarova O. // XXVIII International Conference “Problems of decision and making under uncertainties” (PDMU-2016), August 25-30, 2016, Brno, Czech Republic.
62. Yarova O.A. The Problem of Large Deviations for Markov Evolutions in the Scheme of Poisson and Levi Approximation / Yarova O.A., Yeleyko Ya.I. // Columbia International Publishing. Contemporary Mathematics and Statistics. – 2017. - Vol. 4, No 1. P. 28-40.
63. Yarova O. The problem of large deviations for Markov evolutions in the scheme of nonlinear approximation / Yarova O. // International Conference Modern Stochastics: Theory and applications. IV, Kyiv, Ukraine, May 24-26, 2018, Taras Shevchenko National University of Kyiv.

ДОДАТОК

Список опублікованих праць

1. Ярова О.А. Про поведінку нормуючого множника генератора в апроксимації випадкових процесів / Ярова О.А, Єлейко Я.І. // Кибернетика и системный анализ. – 2016. – Том 52, №2. – С. 147-153.
2. Yarova O. About selection a small normalization parameter for generator of random process / Yarova O. // Вісник ЛНУ. Серія мех.-мат. – 2016. - №81. – С. 159-162.
3. Yarova O.A. The Problem of Large Deviations for Markov Evolutions in the Scheme of Poisson and Levi Approximation / Yarova O.A., Yeleyko Ya.I. // Columbia International Publishing. Contemporary Mathematics and Statistics. – 2017. - Vol. 4, No 1. P. 28-40.
4. Ярова О.А. Нелінійне нормування генераторів марковських процесів у просторі R^d / Ярова О.А. // Вісник ЛНУ. Серія мех.-мат. – 2018. - №83. – С. 202-207.
5. Ярова О.А. Нелінійне нормування випадкової еволюції в схемі апроксимації Леві / Ярова О.А. // Кібернетика та системний аналіз. 2018. Том 54, №3. С. 160-165.
6. Yarova O.A. Nonlinear Approximation in the Large Deviations Principle / Yarova O.A., Yeleyko Ya.I. // Statistics, Opt. Inform. Comput. – Vol. 6, December 2018, pp. 600-608.
7. Yarova O. Behaviour of generator normalization factor in approximation of random processes / Yarova O., Yeleyko Ya. // International Conference “Probability, Reliability and Stochastic Optimization”, Kyiv, Ukraine, April 7-10, 2015, Taras Shevchenko National University of Kyiv.

8. Yarova O. Nonlinear normalization of generator of Markov processes / Yarova O. // XXVIII International Conference "Problems of decision and making under uncertainties" (PDMU-2016), August 25-30, 2016, Brno, Czech Republic.
9. Ярова О.А. Нелінійна апроксимація в проблемі великих відхилень / О.А. Ярова, Я.І. Єлейко // XXIX International Conference "Problems of decision and making under uncertainties" (PDMU-2017), May 10-13, 2017, Mukachevo, Ukraine.
10. Yarova O. Nonlinear approximation for Markov Evolutions / Yarova O., Yeleyko Ya. // XXX International Conference "Problems of decision and making under uncertainties" (PDMU-2017), August 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania.
11. Yarova O. The problem of large deviations for Markov evolutions in the scheme of nonlinear approximation / Yarova O. // International Conference Modern Stochastics: Theory and applications. IV, Kyiv, Ukraine, May 24-26, 2018, Taras Shevchenko National University of Kyiv.
12. Yarova O. Nonlinear normalization for impulse recurrent process in the scheme of Levi approximation / Yarova O. // XXXI International Conference "Problems of decision and making under uncertainties" (PDMU-2018), July 3-8, 2018, Lankaran-Baku, Republic of Azerbaijan.

Апробація результатів

1. Теоретичні та прикладні аспекти аналізу фінансових систем: XIV Міжнародна науково-практична конференції аспірантів та студентів (Львів, 2014);
2. International Conference “Probability, Reliability and Stochastic Optimization” (Kyiv, 2015);
3. Scientific Seminar in Europa – Universitat Viadrina Frankfurt Oder (Germany, 2016);
4. Scientific Seminar in Technische Universitat Dresden (Germany, 2016);
5. XXIX International Conference “Problems of decision and making under uncertainties” (Mukachevo, 2017);
6. Засідання наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка (Львів, 2018);
7. Засідання наукового семінару кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, 2018);
8. International Conference Modern Stochastics: Theory and applications. IV (Kyiv, 2018);
9. Засідання наукового семінару кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Київського політехнічного інституту імені Ігоря Сікорського (Київ, 2018).